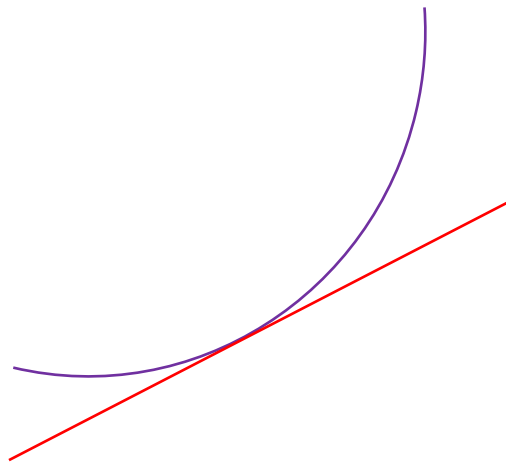


חשבון
דיפרנציאלי
ואינטגרלי
I



גיא סלומון

סטודנטים יקרים

ספר תרגילים זה הינו פרי שנות ניסיון רבות של המחבר בהוראת חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי באוניברסיטת תל אביב, באוניברסיטה הפתוחה, במכללת שנקר ועוד.

שאלות תלמידים וטעויות נפוצות וחוזרות הולידו את הרצון להאיר את הדרך הנכונה לעומדים בפני קורס חשוב זה.

הספר עוסק בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1 (חדו"א 1) והוא מתאים לתלמידים במוסדות להשכלה גבוהה – אוניברסיטאות או מכללות.

הספר מסודר לפי נושאים ומכיל את כל חומר הלימוד, בהתאם לתוכניות הלימוד השונות. הניסיון מלמד כי לתרגול בקורס זה חשיבות יוצאת דופן, ולכן ספר זה בולט בהיקפו ובמגוון התרגילים המופיעים בו.

לכל התרגילים בספר פתרונות מלאים באתר <http://www.gool.co.il> הפתרונות מוגשים בסרטוני וידאו המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי. הפתרון המלא של השאלה מכוון ומוביל לדרך חשיבה נכונה בפתרון בעיות דומות מסוג זה.

לצפיה בשיעור חינם בעמוד הקורס: [חדו"א 1](#)

תקוותי היא, שספר זה ישמש מורה-דרך לכם הסטודנטים ויוביל אתכם להצלחה.

גיא סולומון



תוכן

6	פרק 1 - סדרות
9	פתרונות
10	פרק 2 - טורים עם איברים קבועים
10	טור גיאומטרי
10	טור טלסקופי
10	טור הרמוני מוכלל
10	תכונות אלגבריות של טורים
10	מבחן ההתבדרות
11	מבחן האינטגרל
11	מבחן ההשוואה ומבחן ההשוואה הגבולי
11	מבחן המנה ומבחן השורש
11	מבחן לייבניץ
12	התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי
12	הוכח או הפרך
13	פתרונות
14	פרק 3 - פונקציה ממשית
15	פתרונות
16	פרק 4 - גבול של פונקציה
20	פתרונות
21	פרק 5 - רציפות ומשפט ערך הביניים
21	רציפות
23	משפט ערך הביניים (של קושי)
23	פתרונות
24	פרק 6 - נושאים מתקדמים - רציפות במידה שווה
24	רציפות במידה שווה לפי הגדרה
24	תנאים לרציפות במידה שווה

25.....	תנאים לשלילת רציפות במידה שווה.....
26.....	פרק 7 - גזירות של פונקציה, הגדרת הנגזרת.....
28.....	פתרונות.....
29.....	פרק 8 - גזירה של פונקציה.....
30.....	פתרונות.....
32.....	פרק 9 - נגזרות של פונקציות מיוחדות.....
32.....	נגזרת הפונקציה ההפוכה.....
33.....	פתרונות.....
34.....	פרק 10 - בעיות משיקים (המשמעות הגיאומטרית של הנגזרת).....
35.....	פתרונות.....
36.....	פרק 11 - כלל לופיטל.....
39.....	פתרונות.....
40.....	פרק 12 - חקירת פונקציה.....
42.....	פתרונות.....
47.....	פרק 13 - חקירת פונקציה - "שאלות מסביב".....
49.....	פתרונות.....
50.....	פרק 14 - מקסימום ומינימום מוחלטים של פונקציה.....
50.....	פתרונות.....
51.....	פרק 15 - בעיות מקסימום ומינימום.....
51.....	בעיות בהנדסת המישור.....
56.....	בעיות בהנדסת המרחב.....
58.....	בעיות בפונקציות וגרפים.....
61.....	פתרונות.....
62.....	פרק 16 - פתרון משוואות (משפט ערך הביניים, מונוטוניות (משפט רול), ניוטון רפסון).....
62.....	פתרונות.....
63.....	פרק 17 - בעיות קצב שינוי.....
68.....	פתרונות.....
69.....	פרק 18 - משפט לגרנג'.....

71	פרק 19 - טור טיילור/מקלורן
73	נוסחת השארית של לגרנג'
74	פתרונות
77	פרק 20 - תיאוריה (הוכחות נבחרות)
78	נספחים - נוסחאות
78	נוסחאות - גבולות
79	נוסחאות - נגזרות
80	נוסחאות - אינטגרלים
81	נוסחאות - טריגו
82	נוסחאות - אלגברה
83	נוסחאות - טורי מקלורן של פונקציות חשובות

פרק 1 - סדרות

(1) חשב את הגבולות הבאים :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 2n^2 + 6}{3n^3 + 10n} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 2}{n^2 + 1000n} \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (e^{-n})^{\ln n} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n} \quad (6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 5n + 6}{2n + 10} - \frac{n}{2} \right) \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 2n^2 + 6}{3n^5 + 10n} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16^n + 4^{n+1}}{2^{4n+2} + 2^{n+3}} \quad (9)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{3n-3}}{\sqrt{4n+1} - \sqrt{5n-1}} \quad (8)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^4 + 2n^2 + 6 + 27n^6}}{\sqrt{3n^3 + 10n + 4n^4}} \quad (7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{3n^3 - 5n - 1}{n^3 - 2n^2 + 1} \right) \quad (12)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4n^2 + 2}{n^2 + 1000n}} \quad (11)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 9^n + 3^{n+1}}{81^{0.5n} + 3^{n+3}} \quad (10)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 5n} - n) \quad (15)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{an+1}{bn+2}} \quad (14)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{n^4 + 2n^2 + 6}{3n^4 + 10n}} \quad (13)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^4 + n^2 + 1} - n^2) \quad (18)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n + 1} - n) \quad (17)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + kn} - n) \quad (16)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^n \quad (21)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n} \right)^n \quad (20)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + an} - \sqrt{n^2 + bn}) \quad (19)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n-3} \right)^n \quad (24)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)^{n^2-1} \quad (23)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n} \right)^n \quad (22)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \tan \frac{1}{n} \right)^n \quad (27)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 4n + 1}{n^2 + 2n + 2} \right)^{10n} \quad (26)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + n + 1}{n^2 + n + 4} \right)^{4n^2} \quad (25)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + \sin n}{4n + \cos n} \quad (30)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(2n+1)}{n} \quad (29)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} \quad (28)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n} \quad (33)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + \arctan(2n-3)}{4n + \arctan(n - \ln n)} \quad (32)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + n + \sin 2n}{n^2 + \cos 3n} \quad (31)$$

הערה חשובה מאוד !

בפתרון המלא, יופיע במקום המשתנה n , המשתנה x . יש להתייחס אל x כאל מספר טבעי ! בנוסף, יש לזכור שסדרה היא פונקציה (מהטבעיים לממשיים) ולכן לעיתים אומר פונקציה

במקום סדרה.

(2) חשב את הגבולות הבאים :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} \quad (1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} \quad (2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{4n} \quad (4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{(2n)!}}{2n} \quad (5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + 2^{4n + \frac{1}{n}}} \quad (6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \sin\left(\frac{4}{n}\right) \quad (7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2 + 4n + 1} \quad (8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3 + n^2 + 1} \quad (9)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi n}{2} \quad (10) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n + (-1)^n}{n} \right]^n \quad (11) \quad 4^n \sin \frac{1}{n} \quad (12)$$

(3) חשב את הגבולות הבאים :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right) \quad (1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}}{n} \quad (3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) \quad (4)$$

$$* \text{ רמזים: סעיף 1 - } \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \quad \text{סעיף 2 - הוכח כי } a_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

(4) בתרגילים הבאים נתונה סדרה בעזרת נוסחת נסיגה (רקורסיה).

הוכח שהסדרה מתכנסת וחשב את גבולה.

$$(1) \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, \quad a_1 = \sqrt{2} \quad (2) \quad a_{n+1} = \sqrt{2a_n - 1}, \quad a_1 = 2 \quad (3) \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right), \quad a_1 = 2$$

$$(5) \text{ נתונה הסדרה } a_{n+1} = 2a_n + 3a_{n-1}, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 1$$

א. 1. נגדיר סדרה חדשה b_n על ידי: $b_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}$. הוכח שהגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ קיים וחשב אותו.

2. בעזרת התוצאה של הסעיף הקודם הוכח שהסדרה a_n שואפת לאינסוף.

ב. 1. מצא ביטוי סגור עבור הסדרה a_n (כלומר נוסחה לא רקורסיבית).

2. ענה שוב על סעיף א.1. בעזרת הביטוי הסגור שמצאת.

3. הוכח באינדוקציה שהביטוי הסגור שמצאת בסעיף הקודם הוא אכן נכון.

(6) על סמך ההגדרה של גבול של סדרה הוכח כי :

$$\begin{aligned}
 & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + \sin n}{2n^2 + 3} = \frac{1}{2} \quad \text{ג.} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} = 1 \quad \text{ב.} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 1}{4n + 3} = \frac{1}{2} \quad \text{א.} \\
 & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \cos^2 n}{n^2 + 2} = 0 \quad \text{ו.} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 2n + 1}{2n^2 + n + 3} = 2 \quad \text{ה.} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + (-1)^n}{n^2 + 1} = 1 \quad \text{ד.} \\
 & \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 - n^2 + 5n + 6 = \infty \quad \text{ט.} & \lim_{n \rightarrow \infty} 2n + 4 = \infty \quad \text{ח.} & \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 4n} - n) = 2 \quad \text{ז.} \\
 & \lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{1}{n} = -\infty \quad \text{יב.} & \lim_{n \rightarrow \infty} e^{2n+1} = \infty \quad \text{יא.} & \lim_{n \rightarrow \infty} \log(2n + 5) = \infty \quad \text{י.}
 \end{aligned}$$

(7) הוכח או הפרך :

- (1) אם a_n סדרה חסומה אז יש לה גבול.
- (2) אם b_n סדרה לא חסומה אז $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ או $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$.
- (3) אם $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = -k$ או $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = k$ אז $\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n| = k$.
- (4) אם d_n סדרה עולה אז היא לא חסומה.
- (5) אם ל- a_n ו- b_n אין גבול אז גם ל- $(a_n + b_n)$ וגם ל- $(a_n \cdot b_n)$ אין גבול.
- (6) אם ל- a_n ו- b_n אין גבול אז גם ל- (a_n / b_n) אין גבול.
- (7) אם a_n מתכנסת ו- b_n מתבדרת, אז $(a_n \cdot b_n)$ מתבדרת.
- (8) אם a_n מתכנסת ו- b_n מתבדרת, אז $(a_n \cdot b_n)$ מתכנסת.
- (9) אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{L}$ אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = L$.
- (10) אם $a_n < b_n$ לכל n אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.
- (11) אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ואם b_n חסומה אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \infty$.
- (12) אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = k$ ואם $a_n < 1$ לכל n אז $k < 1$.
- (13) אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ אז $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^n = 1$.

פתרונות

- (1) (1) 0 (2) .4 (3) ∞ (4) 0 (5) -5 (6) .1 (7) 1.5 (8) $\frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}}$ (9) 0.25 (10) .4 (11) .2
- (12) $\ln 3$ (13) $e^{1/3}$ (14) $(\lim a_n = \infty) \Leftrightarrow (a > 0, b = 0)$, $(\lim a_n = \sqrt[5]{a/b}) \Leftrightarrow (b \neq 0)$
- (15) 2.5 (16) $\frac{k}{2}$ (17) 0.5 (18) 0.5 (19) $\frac{a-b}{2}$ (20) $e^{0.5}$ $(\lim a_n = -\infty) \Leftrightarrow (a < 0, b = 0)$
- (21) .1 (22) e^{-1} (23) e^3 (24) e^{-12} (25) e^{30} (26) e (27) 0 (28) 0 (29) 0 (30) 0.75 (31) 3
- (32) $\frac{3}{4}$ (33) .4 (34) 0 (35) 0 (36) 0 (37) 0 (38) $\frac{1}{4e}$ (39) $\frac{1}{3}$ (40) 0.5 (41) .4 (42) 0.5 (43) 0.5 (44) 0.5 (45) 0.5 (46) 0.5 (47) 0.5 (48) 0.5 (49) 0.5 (50) 0.5 (51) 0.5 (52) 0.5 (53) 0.5 (54) 0.5 (55) 0.5 (56) 0.5 (57) 0.5 (58) 0.5 (59) 0.5 (60) 0.5 (61) 0.5 (62) 0.5 (63) 0.5 (64) 0.5 (65) 0.5 (66) 0.5 (67) 0.5 (68) 0.5 (69) 0.5 (70) 0.5 (71) 0.5 (72) 0.5 (73) 0.5 (74) 0.5 (75) 0.5 (76) 0.5 (77) 0.5 (78) 0.5 (79) 0.5 (80) 0.5 (81) 0.5 (82) 0.5 (83) 0.5 (84) 0.5 (85) 0.5 (86) 0.5 (87) 0.5 (88) 0.5 (89) 0.5 (90) 0.5 (91) 0.5 (92) 0.5 (93) 0.5 (94) 0.5 (95) 0.5 (96) 0.5 (97) 0.5 (98) 0.5 (99) 0.5 (100) 0.5
- (10) אין גבול. (11) אין גבול. (12) ∞ (13) 1 (14) 0 (15) 1 (16) 3 (17) 4 (18) 1 (19) 4 (20) 1 (21) 4 (22) 1 (23) 4 (24) 1 (25) 4 (26) 1 (27) 4 (28) 1 (29) 4 (30) 1 (31) 4 (32) 1 (33) 4 (34) 1 (35) 4 (36) 1 (37) 4 (38) 1 (39) 4 (40) 1 (41) 4 (42) 1 (43) 4 (44) 1 (45) 4 (46) 1 (47) 4 (48) 1 (49) 4 (50) 1 (51) 4 (52) 1 (53) 4 (54) 1 (55) 4 (56) 1 (57) 4 (58) 1 (59) 4 (60) 1 (61) 4 (62) 1 (63) 4 (64) 1 (65) 4 (66) 1 (67) 4 (68) 1 (69) 4 (70) 1 (71) 4 (72) 1 (73) 4 (74) 1 (75) 4 (76) 1 (77) 4 (78) 1 (79) 4 (80) 1 (81) 4 (82) 1 (83) 4 (84) 1 (85) 4 (86) 1 (87) 4 (88) 1 (89) 4 (90) 1 (91) 4 (92) 1 (93) 4 (94) 1 (95) 4 (96) 1 (97) 4 (98) 1 (99) 4 (100) 1
- (2) הגבול 1. (3) הגבול 1. (4) הגבול 1. (5) א.1. הגבול $\frac{1}{3}$. ב.1. $a_n = \frac{1}{6} \cdot 3^n - \frac{1}{2} \cdot (-1)^n$

פרק 2 - טורים עם איברים קבועים

טור גיאומטרי

(1) בדוק את התכנסות הטורים הבאים. במידה והטור מתכנס, מצא את סכומו.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^n}{4^{n+2}} \quad (3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{7^{n+1}} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (0.44)^n \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n}}{3^{2n}} \quad (6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + (-5)^n}{7^n} \quad (5) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-4) \left(\frac{3}{4}\right)^{2n} \quad (4)$$

טור טלסקופי

(2) בדוק את התכנסות הטורים הבאים. במידה והטור מתכנס, מצא את סכומו.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad (3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+3)(4n-1)} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \quad (1)$$

טור הרמוני מוכלל

(3) בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{5n} \quad (3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^e} \quad (6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{\sqrt[3]{n^4}} \quad (5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2/3} \quad (4)$$

תכונות אלגבריות של טורים

(4) בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10 + \sqrt{n}}{\sqrt{n}} \quad (3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+1}{n^2} \quad (2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4^n}{7^{n+1}} + n^{-1.5} \right) \quad (1)$$

מבחן ההתבדרות

(5) בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n \quad (3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ln n \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{n}\right)^n \quad (6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \arctan n \quad (5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + 2} \quad (4)$$

מבחן האינטגרל

(6) בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2+1} \quad (3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+5}} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1} \quad (1)$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3} \quad (6) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} \quad (p \leq 1) \quad (5) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} \quad (p > 1) \quad (4)$$

מבחן השוואה ומבחן השוואה הגבולי

(7) בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4n+1}{\sqrt{n^{10}+n+1}} \quad (3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)(n+4)} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2+10n+1} \quad (1)$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \sin^2 n}{n!} \quad (6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-2}{3^n+2n} \quad (5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+5}{\sqrt{n^4+n+1}} \quad (4)$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} \ln n}{n^2+1} \quad (9) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right) \quad (8) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+1} - n\right) \quad (7)$$

מבחן המנה ומבחן השורש

(8) בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!(2n)^n} \quad (3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n+2)} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \quad (1)$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{1000} e^{-n} \quad (6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} \quad (5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{n! \cdot 3^n} \quad (4)$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \quad (9) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(1+n^2)}{n!} \quad (8) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \quad (7)$$

מבחן לייבניץ

(9) בדוק את התכנסות הטורים הבאים:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n^2+n} \quad (3) \quad \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{4n+1} \quad (1)$$

התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי

(10) קבע אם הטור מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר.

$$\begin{array}{lll} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n} & (3) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} & (2) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n^2} & (1) \\ \sum_{n=2}^{\infty} \left(-\frac{1}{\ln n}\right)^n & (6) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^3} & (5) & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \ln n}{n} & (4) \\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n^2+n} & (9) & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1+n \ln n}{n^2} & (8) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}} & (7) \end{array}$$

הוכח או הפרך

(11) לפניך טענות. אם הטענה נכונה, הוכח אותה. אם לא הבא דוגמה נגדית.

א. אם $\sum a_n$ מתכנס ו- $\sum b_n$ מתבדר אז $\sum (a_n + b_n)$ מתבדר.

ב. אם $\sum a_n$ מתבדר ו- $\sum b_n$ מתבדר אז $\sum (a_n + b_n)$ מתבדר.

ג. אם $\sum a_n^2$ מתכנס אז $\sum a_n$ מתכנס בהחלט.

ד. אם $\sum a_n$ חיובי ומתכנס אז $\sum \frac{1}{a_n}$ מתבדר.

ה. אם $\sum a_n$ מתכנס אז $\sum a_n^2$ מתכנס.

פתרונות

		(1)
(3) מתבדר	(2) מתכנס ל- $1/3$	(1) מתכנס ל- $11/14$
(6) מתכנס ל- 8	(5) מתכנס ל- $11/12$	(4) מתכנס ל- $-64/7$
		(2)
(3) מתבדר	(2) מתכנס ל- $1/12$	(1) מתכנס ל- $1/2$
		(3)
(3) מתבדר	(2) מתבדר	(1) מתכנס
(6) מתכנס	(5) מתכנס	(4) מתבדר
		(4)
(3) מתבדר	(2) מתבדר	(1) מתכנס
		(5)
(3) מתבדר	(2) מתבדר	(1) מתבדר
(6) מתבדר	(5) מתבדר	(4) מתבדר
		(6)
(3) מתכנס	(2) מתבדר	(1) מתבדר
(6) מתכנס	(5) מתבדר	(4) מתכנס
		(7)
(3) מתכנס	(2) מתבדר	(1) מתכנס
(6) מתכנס	(5) מתכנס	(4) מתבדר
(9) מתכנס	(8) מתכנס	(7) מתבדר
		(8)
(3) מתכנס	(2) מתכנס	(1) מתבדר
(6) מתכנס	(5) מתכנס	(4) מתכנס
(9) מתכנס	(8) מתכנס	(7) מתכנס
		(9)
(3) מתכנס	(2) מתכנס	(1) מתכנס
		(10)
(3) מתכנס בתנאי	(2) מתכנס בהחלט	(1) מתבדר
(6) מתכנס בהחלט	(5) מתכנס בהחלט	(4) מתכנס בתנאי
(9) מתכנס בתנאי	(8) מתכנס בתנאי	(7) מתכנס בתנאי

פרק 3 - פונקציה ממשית

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות :

$$y = \frac{4x+1}{x^2+1} \quad (3)$$

$$y = \frac{1}{x^2-4} \quad (2)$$

$$y = x^3 - x^2 - 4x + 1 \quad (1)$$

$$y = \sqrt{x-4} \quad (6)$$

$$y = \frac{x^2}{x^2-x-2} \quad (5)$$

$$y = \frac{1}{x^3-x} \quad (4)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{1-|x|}} \quad (9)$$

$$y = \sqrt[3]{x^2+x-1} \quad (8)$$

$$y = \sqrt{x^2+x-2} \quad (7)$$

$$y = e^{x^2+x+1} \quad (12)$$

$$y = \log x + \frac{1}{\log x} \quad (11)$$

$$y = \ln(x^2+x-2) \quad (10)$$

$$y = \cot(4x) \quad (15)$$

$$y = \tan(10x) \quad (14)$$

$$y = \log_x(x+4) \quad (13)$$

$$y = \arccos(x+1) \quad (18)$$

$$y = \arcsin(x-4) \quad (17)$$

$$y = \arctan(x+4) \quad (16)$$

(2) נתונות הפונקציות הבאות : $f(x) = x-4$, $g(x) = x^2$, $h(x) = \frac{4}{x}$.

חשב את הפונקציות המורכבות הבאות :

$$h(h(x)) \quad (6) \quad f(f(x)) \quad (5) \quad h(f(x)) \quad (4) \quad f(g(x)) \quad (3) \quad h(g(f(5))) \quad (2) \quad f(g(1)) \quad (1)$$

(3) בתרגילים הבאים הוכח שהפונקציה הנתונה היא חח"ע בתחום הגדרתה ומצא את הפונקציה ההפוכה לה. בנוסף מצא את התמונה של הפונקציה.

$$f(x) = x^2 - 4 \quad (x \geq 0) \quad (4) \quad f(x) = \frac{3x-2}{x-2} \quad (3) \quad f(x) = \frac{x+1}{x} \quad (2) \quad f(x) = \frac{x-1}{3} \quad (1)$$

(4) מצא איזה מבין הפונקציות הבאות הוא זוגיות ואיזה זוגיות :

$$y = \frac{1}{x} \quad (4)$$

$$y = 1 \quad (3)$$

$$y = x^4 + x^{10} \quad (2)$$

$$y = 4x^3 \quad (1)$$

$$y = \sin x \cdot \cos x \quad (8)$$

$$y = \ln x + x^2 \quad (7)$$

$$y = 2^x \quad (6)$$

$$y = x^2 + \sin^2 x \quad (5)$$

(5) מצא את המחזור של כל אחת מהפונקציות הבאות :

$$y = \sin^2 x \quad (4) \quad y = \tan \frac{x}{3} \quad (3) \quad y = 5 + 3 \sin(4x+1) \quad (2) \quad y = 2 \sin x \quad (1)$$

(6) רשום כל אחת מהפונקציות הבאות כפונקציה מפוצלת ושרטט את גרף הפונקציה.

$$y = \frac{|x|}{x} \quad (4) \quad y = x^2 + 2|x-1| \quad (3) \quad y = 3|x+1| \quad (2) \quad y = |x-2| \quad (1)$$

* יש הקוראים לפונקציה "מפוצלת", פונקציה "מוטלאת" או פונקציית "תפר" או פונקציה "לפי מקרים".

פתרונות

(1)

$$\begin{array}{lllll}
 x \neq 2, -1 & (5) & x \neq 0, 1, -1 & (4) & x \text{ כל} & (3) & x \neq \pm 2 & (2) & x \text{ כל} & (1) \\
 x < -2 \text{ או } x > 1 & (10) & -1 < x < 1 & (9) & x \text{ כל} & (8) & x \leq -2 \text{ או } x \geq 1 & (7) & x \geq 4 & (6) \\
 x \neq \pi/4 \cdot k & (15) & x \neq \pi/20 + \pi/10 \cdot k & (14) & 0 < x \neq 1 & (13) & x \text{ כל} & (12) & 0 < x \neq 1 & (11) \\
 & & & & -2 < x < 0 & (18) & 3 < x < 5 & (17) & x \text{ כל} & (16)
 \end{array}$$

(2)

$$\begin{array}{llllll}
 x & (6) & x-8 & (5) & \frac{4}{x-4} & (4) & x^2-4 & (3) & 4 & (2) & -3 & (1)
 \end{array}$$

(3)

$$\begin{array}{llll}
 y \neq 3, & f^{-1}(x) = \frac{2x-2}{x-3} & (3) & y \neq 1, & f^{-1}(x) = \frac{1}{x-1} & (2) & y \text{ כל}, & f^{-1}(x) = 3x+1 & (1) \\
 & & & & & & & y \geq -4, & f^{-1}(x) = \sqrt{x+4} & (4)
 \end{array}$$

(4)

זוגיות - 2,3,5,8 אי זוגיות - 1,4 כלליות - 6,7

(5)

$$\begin{array}{llll}
 \pi & (4) & 3\pi & (3) & \pi/2 & (2) & 2\pi & (1)
 \end{array}$$

(6)

$$y = \begin{cases} 3x+3 & x \geq -1 \\ -3x-3 & x < -1 \end{cases} \quad (2) \qquad y = \begin{cases} x-2 & x \geq 2 \\ 2-x & x < 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$y = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \quad (4) \qquad y = \begin{cases} x^2+2x-2 & x \geq 1 \\ x^2-2x+2 & x < 1 \end{cases} \quad (3)$$

פרק 4 - גבול של פונקציה

(1) חשב את הגבולות הבאים (הצבה):

$$\lim_{x \rightarrow 100} 20 \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x+3} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 10} \frac{x+1}{x+2} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 4} x^2 + x + 1 \quad (1)$$

(2) חשב את הגבולות הבאים (צמצום/פירוק לגורמים):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x-1} \quad (4) & \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - x}{x-1} \quad (3) & \quad \lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad (2) & \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad (1) \\ \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x-3} \quad (8) & \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x+1} \quad (7) & \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x-2} \quad (6) & \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 5x + 2}{6x^2 - 5x + 1} \quad (5) \\ & & & \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^3 - 4x^2 + x - 4} \quad (9) \end{aligned}$$

(3) חשב את הגבולות הבאים (כפל בצמוד):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} - 2}{x^2 - 1} \quad (4) & \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - \sqrt{x+6}}{2x-6} \quad (3) & \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} \quad (2) & \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1-x} \quad (1) \\ \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{\sqrt{x^2 + x + 2} + x} \quad (8) & \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1-x} \quad (7) & \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{3x+1}}{1 - \sqrt{2x-1}} \quad (6) & \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+5}}{x-4} \quad (5) \end{aligned}$$

(4) חשב את הגבולות הבאים (היעזר בגבול הטריגונומטרי $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{\sin 2x} \quad (3) & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(4x)} \quad (2) & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{4x} \quad (1) \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{\cos x}}{x} \quad (6) & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \quad (5) & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad (4) \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2} \quad (9) & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x - \sin 3x}{x^3} \quad (8) & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4} \quad (7) \end{aligned}$$

(5) חשב את הגבולות הבאים (פונקציה השואפת לאינסוף):

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{(x-2)(x-5)} \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2}{(2-x)^2} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)^2}{x-2} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 4}{x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} \quad (8) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} ((\ln x)^2 + 2 \ln x - 3) \quad (7) \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} -\frac{1}{2} \ln(2-x) \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \cdot \cot x \quad (12) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \quad (11) \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \quad (10) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \quad (9)$$

(6) חשב את הגבולות הבאים (x שואף לאינסוף) :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x + e^x \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x})^{\ln x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} - \frac{x}{2} \right) \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \quad (5) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^3 + 10x} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^6 - 5x}}{x^3 - 2x^2 + 1} \quad (9) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (8) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (12) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-3}}{\sqrt{4x+1} - \sqrt{5x-1}} \quad (11) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^4 + 2x^2 + 6 + 27x^6}}{\sqrt{3x^3 + 10x + 4x^4}} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (15) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (14) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (13)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^4 + 10x}} \quad (18) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{3x^3 - 5x - 1}{x^3 - 2x^2 + 1} \right) \quad (17) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x}} \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 5x} - x \right) \quad (21) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{ax+1}{bx+2}} \quad (20) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sin \left(\frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \right) \quad (19)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} + x \right) \quad (24) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - x \right) \quad (23) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + kx} - x \right) \quad (22)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx} \right) \quad (26) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - x^2 \right) \quad (25)$$

(7) חשב את הגבולות הבאים (העזר בגבול של אוילר $e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} (1+\frac{1}{x})^x$):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x} \right)^x \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^x \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x} \right)^x \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-3} \right)^x \quad (5) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)^{x^2-1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \tan \frac{1}{x} \right)^x \quad (9) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 4x + 1}{x^2 + 2x + 2} \right)^{10x} \quad (8) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x + 4} \right)^{4x^2} \quad (7)$$

(8) חשב את הגבולות הבאים (ע"י שימוש בכלל הסנדוויץ'):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \sin x}{4x + \cos x} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(2x+1)}{x} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \cos(\ln x^2) \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad (5) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + x + \sin 2x}{x^2 + \cos 3x} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} [x] \quad (9) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{2^x + 3^x + 4^x} \quad (8) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \arctan(2x-3)}{4x + \arctan(x - \ln x)} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} [x] \quad (10)$$

(9) חשב את הגבול $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ של הפונקציות הבאות (גבול של פונקציה מפורצלת):

$$(a=0) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 4x}{x} & x > 0 \\ 4 + e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$(a=1) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} & x > 1 \\ \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} & x < 1 \end{cases} \quad (2)$$

$$(a=0) f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (3)$$

$$(a=\infty) f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (4)$$

$$(a=-\infty) f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (5)$$

(10) חשב על פי הגדרת הגבול את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 24} \sqrt{x+1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 1 \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} x^2 \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} 7x + 14 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x^2-1} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin x \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} \quad (5)$$

$$(11) \text{ הוכח על פי הגדרה את הגבול: } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3+x}{x^2+1} = 1$$

הערה חשובה מאוד!

במרבית קורסי החדו"א לומדים בהמשך את כלל לופיטל לחישוב גבולות. בעזרת כלל זה ניתן לחשב ללא מאמץ את הגבולות המופיעים בשאלות 2, 3 ו-4.

פתרונות

									(1)
						40 (4	2 (3	$\frac{11}{12}$ (2	21 (1
									(2)
$\frac{8}{17}$ (9	27 (8	3 (7	32 (6	-3 (5	$n-1$ (4	6 (3	$\frac{10}{8.5}$ (2	$\frac{5}{6}$ (1	
									(3)
	$-\frac{8}{3}$ (8	$\frac{1}{3}$ (7	$\frac{3}{4}$ (6	$\frac{1}{6}$ (5	$\frac{3}{8}$ (4	$-\frac{1}{12}$ (3	4 (2	$\frac{1}{2}$ (1	
									(4)
1 (9	4 (8	$\frac{1}{8}$ (7	$\frac{1}{2}$ (6	$\frac{1}{2}$ (5	$\frac{1}{2}$ (4	$\frac{1}{2}$ (3	$\frac{3}{4}$ (2	$\frac{3}{4}$ (1	
									(5)
0 (9	ϕ (8	∞ (7	∞ (6	$-\infty$ (5	ϕ (4	$-\infty$ (3	ϕ (2	ϕ (1	
						$-\infty$ (12	ϕ (11	1 (10	
									(6)
-3 (9	-1 (8	1 (7	-5 (6	0 (5	$-\infty$ (4	4 (3	$-\frac{\pi}{2}$ (2	0 (1	
$e^{\frac{1}{3}}$ (18	$\ln 3$ (17	2 (16	$\frac{1}{9}$ (15	4 (14	0 (13	0.25 (12	$\frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}}$ (11	1.5 (10	
	$\frac{a-b}{2}$ (26	1/2 (25	-1/2 (24	1/2 (23	$k/2$ (22	2.5 (21	(**) (20	0 (19	
									(7)
e (9	e^{30} (8	e^{-12} (7	e (6	e^3 (5	e^{-1} (4	e^2 (3	1 (2	$e^{\frac{1}{2}}$ (1	
									(8)
1 (9	4 (8	0.75 (7	0 (6	0 (5	3 (4	0.75 (3	0 (2	0 (1	
								0 (10	
									(9)
					-1 (5	1 (4	ϕ (3	ϕ (2	4 (1
									(10)
	$\pm\infty$ (7	$\sin \pi / 4$ (6	1 (5	5 (4	0 (3	9 (2	28 (1		

(**) בשאלה 6 תרגיל 20 יש להפריד לשלושה מקרים :

$$\lim = \sqrt[5]{\frac{a}{b}} \Leftarrow b \neq 0 \text{ (I)}$$

$$\lim = \infty \Leftarrow a > 0, b = 0 \text{ (II)}$$

$$\lim = -\infty \Leftarrow a < 0, b = 0 \text{ (III)}$$

פרק 5 - רציפות ומשפט ערך הביניים

רציפות

(1) בדוק את רציפות הפונקציות הבאות ב"נקודת התפר" שלהן :
(בסעיפים 3 ו-4 שרטט את גרף הפונקציה).

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x > 0 \\ 2 & x = 0 \\ 1 + e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \end{cases} \quad (2) \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 4x}{x} & x > 0 \\ 4 + e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 1 \\ x^2 & x < 1 \end{cases} \quad (4) \qquad f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 2 \\ 5-x & x > 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \leq 1 \\ |x-2| & 1 < x < 2 \\ 1 & x = 2 \\ x-2 & x > 2 \end{cases} \quad (6) \qquad f(x) = \begin{cases} \sin x & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 2-x & 1 \leq x < 2 \\ x-3 & x \geq 2 \end{cases} \quad (5)$$

* נקודת התפר היא הנקודה בה נוסחת הפונקציה משתנה.
למשל, נקודת התפר בתרגיל 1 היא $x = 0$.

(2) מה צריך להיות הערך של הקבוע k על מנת שהפונקציות הבאות תהינה רציפות לכל x :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 3}{x-1} & x \neq 1 \\ k & x = 1 \end{cases} \quad (2) \qquad f(x) = \begin{cases} kx^2 + x - 2 & x \leq 2 \\ 5kx - 6 & x > 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - k & x \leq 0 \\ x^{2x} & x > 0 \end{cases} \quad (4) \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x-2} & x \neq 2 \\ k & x = 2 \end{cases} \quad (3)$$

הערה : על סעיף 4 תוכל לענות רק אחרי שתלמד את כלל לופיטל .

(3) מה צריך להיות הערך של הקבועים a ו- b על מנת שהפונקציות הבאות תהינה רציפות בתחום הגדרתן :

$$f(x) = \begin{cases} a\sqrt[3]{x+x^2} & x < -1 \\ bx^2 + x - 1 & -1 \leq x \leq 1 \quad (2) \\ 4 \frac{\sqrt{x-1+a} - \sqrt{a}}{\sqrt{a}(x-1)} & x > 1 \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} ax+b & x \leq 0 \\ \frac{\sin x}{2x} & 0 < x < \pi \quad (1) \\ a \cos x & x \geq \pi \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}} & x < 1 \\ ax^2 + b & 1 \leq x \leq 2 \quad (4) \\ (x-1)^{\frac{1}{x-2}} & x > 2 \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{1-x}} & x > 1 \\ (x-1)\ln(x+1) + b & 0 \leq x \leq 1 \\ a \frac{2^x - 2}{2^x + 4} & x < 0 \end{cases} \quad (3)$$

הערה : על סעיפים 3 ו-4 תוכל לענות רק אחרי שתלמד את כלל לופיטל .

(4) עבור כל אחת מהפונקציות בשאלה (1) רשום עבור כל נקודת אי רציפות מאיזה סוג היא. **(5)** הוכח או הפרך :

1. סכום שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.
 2. הפרש שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.
 3. מכפלת שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.
 4. מנתן של שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.
- (6)** ידוע ש- f רציפה ו- g לא רציפה. האם $f + g$ רציפה? הוכח את טענתך.

משפט ערך הביניים (של קושי)

(7) צטט את משפט ערך הביניים של קושי והסבר אותו גרפית.

(8) הוכח שלמשוואות הבאות יש לפחות פתרון אחד :

$$x - 0.25 \sin x = 7 \quad (3) \quad x^2 = -\ln x \quad (2) \quad x^3 + 4x - 1 = 0 \quad (1)$$

(9) הוכח שלמשוואה $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ יש לפחות פתרון אחד.

(10) הוכח שלמשוואות הבאות יש לפחות שני פתרונות :

$$4x^3 + 5x - \frac{1}{x} = 0 \quad (2) \quad e^x - 5x = 0 \quad (1)$$

(11) תהי f פונקציה רציפה לכל x המקיימת: $f(0) = 1, f(1) = 2$.

(12)

הוכח שלמשוואה $f(x) + \sin x = 4x$ יש לפחות פתרון אחד.

(13) נגדיר

מצא קטע שאורכו אינו עולה על יחידה אחת בו למשוואה $x^2 = 10 - \frac{1}{x}$ יש פתרון.

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x-1}$$

א. חשב $f(0), f(2)$.

ב. האם ניתן להסיק לפי משפט ערך הביניים שלמשוואה $x^2 + \frac{1}{x-1} = 0$ יש פתרון בקטע $(0, 2)$.

פתרונות

(1) לא רציפה. (2) לא רציפה. (3) רציפה. (4) רציפה. (5) רציפה בנקי: $x = 0, 1$, לא רציפה

בנקודה $x = 2$. (6) רציפה בנקי $x = 1$. לא רציפה בנקי $x = 2$. (1) $k = 1$. (2) $k = 4$.

(3) $k = \frac{2}{3}$. (4) $k = -1$. (1) $a = 0, b = \frac{1}{2}$. (2) $a = 1, b = 2$ או $a = 2, b = 1$.

(3) $a = -2e^{-1}, b = e^{-1}$. (4) $a = e/3, b = -e/3$. (1) סליקה. (2) סליקה. (5) מסוג

ראשון. (6) סליקה. (12) $[0.1, 1]$. (13) א. $f(0) = -1, f(2) = 5$. ב. לא.

פרק 6 - נושאים מתקדמים - רציפות במידה שווה

רציפות במידה שווה לפי הגדרה

הוכח:

(1) $f(x) = 7$ (פונקציה קבועה) רבמי"ש (רציפה במידה שווה) ב- i

(2) $f(x) = 2x + 3$ רבמי"ש ב- i

(3) $f(x) = \sqrt{x}$ רבמי"ש ב- $[0, \infty)$

(4) $f(x) = \sqrt{|x|+1}$ רבמי"ש ב- i

תנאים לרציפות במידה שווה

(1) הוכח שהפונקציה $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ רציפה במידה שווה בקטע $(0,1)$

(2) הוכח שהפונקציה $f(x) = xe^{-x^2}$ רציפה במידה שווה בקטע $-\infty < x < \infty$

(3) הוכח שהפונקציה $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$ רציפה במידה שווה ב- $(0, \infty)$

(4) הוכח שהפונקציה $f(x) = \arctan(x)$ רציפה במידה שווה ב- $(-\infty, \infty)$

(5) הוכח כי הפונקציה $f(x) = \ln x$ רציפה במידה שווה בקטע $[1, \infty)$

(6) הוכח כי הפונקציה $f(x) = \sqrt{x}$ רציפה במידה שווה בקטע $[1, \infty)$

(7) הוכח כי הפונקציה $f(x) = \arctan(x)$ רציפה במידה שווה בכל R

(8) הוכח כי הפונקציה $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ רציפה במידה שווה בקטע $(0, \infty)$

תנאים לשלילת רציפות במידה שווה

(1) נתבונן בפונקציה $f(x) = \sin x^2$ בקטע $-\infty < x < \infty$.
הוכח שהפונקציה לא רציפה במידה שווה בקטע.

(2) נתונה הפונקציה $f(x) = e^x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ בקטע $(0,1)$.
הוכח שהפונקציה לא רציפה במידה שווה בקטע.

(3) נתונה הפונקציה $f(x) = x \sin x$ בקטע $0 \leq x < \infty$.
הוכח שהפונקציה לא רציפה במידה שווה בקטע.

(4) נתונה הפונקציה $f(x) = \ln x$ בקטע $0 < x < 1$.
הוכח שהפונקציה לא רציפה במידה שווה בקטע.

פרק 7 - גזירות של פונקציה, הגדרת הנגזרת

(1) א. תאר שתי דרכים שונות לבדיקת גזירות של פונקציה מפוצלת בנקודת הפיצול (תפר) שלה. השתמש בפונקציה מסעיף ב.3. שלהלן כדי להדגים שתי שיטות אלה. בנוסף, הסבר מתי עליך להשתמש בכל אחת מהשיטות שתיארת.

ב. בדוק גזירות הפונקציות הבאות בתחום הגדרתן בכל דרך שתבחר. בנוסף רשום נוסחה עבור הנגזרת של כל אחת מהפונקציות.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x & x \geq 2 \\ x^3 - 14 & x < 2 \end{cases} \quad (2) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x & x \geq 2 \\ x^3 - 14 & x < 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1+2x) & -0.5 < x < 0 \\ x^2 + 2x & x \geq 0 \end{cases} \quad (4) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + 8x & x \geq 2 \\ x^3 + 12 & x < 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$f(x) = 3x^2 + x|x| + 1 \quad (6) \quad f(x) = 2 + 4|x-1| \quad (5)$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (8) \quad f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (7)$$

(2)

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x+1} & x \geq -1 \\ \frac{1}{x} + a & x < -1 \end{cases} \quad \text{נתונה הפונקציה}$$

א. עבור איזה ערך של הקבוע a הפונקציה רציפה בנקודה $x = -1$.
 ב. עבור ערך ה- a שקיבלת בסעיף א בדוק **על פי הגדרת הנגזרת** האם הפונקציה הנתונה גזירה בנקודה $x = -1$.

(3)

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-1} & x \geq 0 \\ -(x+1)^2 & x < 0 \end{cases} \quad \text{נתונה הפונקציה}$$

א. האם הפונקציה רציפה ?

ב. בדוק **על פי הגדרת הנגזרת** האם הפונקציה הנתונה גזירה בנקודה $x = 1$.

(4) עבור איזה ערכים של הקבועים a ו- b יהיו הפונקציות הבאות גזירות בנקודת התפר. עבור ערכים אלה, רשום נוסחה עבור הנגזרת.

$$f(x) = \begin{cases} e^x & 0 < x \leq 1 \\ ax + b & x > 1 \end{cases} \quad \text{ב) } f(x) = \begin{cases} \ln^3 x & 0 < x \leq e \\ ax + b & x > e \end{cases} \quad \text{א)}$$

(5) חשב על פי הגדרת הנגזרת את נגזרות הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \sin 4x \quad (3) \quad f(x) = \frac{1}{x+1} \quad (2) \quad f(x) = x^2 + 4x + 1 \quad (1)$$

$$f(x) = \sqrt{x+10} \quad (6) \quad f(x) = \ln x \quad (5) \quad f(x) = e^x \quad (4)$$

* בתרגיל זה אסור להשתמש בכלל לופיטל.

(6) חשב את $f'(0)$ עבור כל אחת מהפונקציות הבאות:

$$f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3) \cdot (x-4) \quad (1)$$

$$f(x) = 2x(|x|+1)\sqrt{1+x+x^2} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{\sin x(x-4)^{10}(1+\tan x)^4 \cos(x+\sin x)}{(x-1)^2(x-10)^{10}} \quad (3)$$

$$\left(z(0) = 1, \lim_{x \rightarrow 0} z(x) = 4 : \right) \text{גזירה} \quad (x) = x \cdot z(x) \quad (4)$$

$$f(x) = |x^4 - x^3 + \sin(10x) - 1| \quad (5)$$

(7) בדוק האם הפונקציה משאלה (1) סעיף 4 גזירה פעמיים בנקודה $x = 0$.

(8) הוכח או הפרך (אם הטענה נכונה, הוכח אותה. אם לא הבא דוגמה נגדית לטענה):

א. אם h גזירה ב- x_0 , ו- g אינה גזירה ב- x_0 אז $f = g + h$ אינה גזירה ב- x_0 .

ב. אם h אינה גזירה ב- x_0 , ו- g אינה גזירה ב- x_0 אז $f = g + h$ אינה גזירה ב- x_0 .

ג. אם h אינה גזירה ב- x_0 , ו- g אינה גזירה ב- x_0 אז $f = g \cdot h$ אינה גזירה ב- x_0 .

ד. אם h גזירה ב- x_0 , ו- g אינה גזירה ב- x_0 אז $f = g \cdot h$ אינה גזירה ב- x_0 .

פתרונות

(1)

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-5 & x > 2 \\ 3x^2 & x < 2 \end{cases} \quad (2) \quad f'(x) = \begin{cases} 2x-4 & x > 2 \\ 3x^2 & x < 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{1+2x} & -0.5 < x < 0 \\ 2x+2 & x \geq 0 \end{cases} \quad (4) \quad f'(x) = \begin{cases} 2x+8 & x \geq 2 \\ 3x^2 & x < 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 8x & x \geq 0 \\ 4x & x < 0 \end{cases} \quad (6) \quad f'(x) = \begin{cases} 4 & x > 1 \\ -4 & x < 1 \end{cases} \quad (5)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (8) \quad f'(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (7)$$

לתשומת לבך! בתחומים בהם קיימת נוסחה לנגזרת, הפונקציה גזירה. בנקודות בהן הנגזרת לא קיימת הפונקציה לא גזירה. למשל, בסעיף 1 הפונקציה גזירה עבור $x \neq 2$.

(2) (1) $a=1$ (2) לא גזירה.

(3) (1) רציפה (2) לא גזירה.

(4) (א) $a=3/e, b=-2$ (ב) $a=e, b=0$

(5)

$$f'(x) = 4 \cos(4x) \quad (3) \quad f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} \quad (2) \quad f'(x) = 2x+4 \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+10}} \quad (6) \quad f'(x) = \frac{1}{x} \quad (5) \quad f'(x) = e^x \quad (4)$$

$$-10 \quad (5) \quad 4 \quad (4) \quad (0.4)^{10} \quad (3) \quad 2 \quad (2) \quad 44! \quad (1) \quad (6)$$

(7) לא גזירה פעמיים.

פרק 8 - גזירה של פונקציה

(1) גזור פעמיים את הפונקציות הבאות (בסעיפים 29-27 גזור פעם אחת):

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad (3) \quad f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} \quad (2) \quad f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{2x} \quad (1)$$

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad (6) \quad f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad (5) \quad f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4} \quad (4)$$

$$f(x) = x \cdot \ln x \quad (9) \quad f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (8) \quad f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (7)$$

$$f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x - 3 \quad (12) \quad f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}} \quad (11) \quad f(x) = x^2 \cdot \ln x \quad (10)$$

$$f(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}} \quad (15) \quad f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad (14) \quad f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x} \quad (13)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1} \quad (18) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} \quad (17) \quad f(x) = x \cdot e^{-2x^2} \quad (16)$$

$$f(x) = \cos(x^4) \quad (21) \quad f(x) = \sin(x^3) \quad (20) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} (1-x) \quad (19)$$

$$f(x) = \ln(\cos x^2) \quad (24) \quad f(x) = \tan(x^2) \quad (23) \quad f(x) = \sin^3 x \quad (22)$$

$$f(x) = (x+1)^{\sin x} \quad (27) \quad f(x) = \arctan(x^2) \quad (26) \quad f(x) = \arcsin(2x+3) \quad (25)$$

$$f(x) = (\cos x)^{\ln x} \quad (29) \quad f(x) = (\sin x)^x \quad (28)$$

פתרונות

$$(2) \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 20x - 62}{(2x+10)^2}, \quad f''(x) = \frac{448}{(2x+10)^3} \quad f'(x) = \frac{2x^2 - 8}{4x^2}, \quad f''(x) = \frac{4}{x^3}$$

$$(4) \quad (3)$$

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2}, \quad f''(x) = \frac{4x \cdot (2x^2 + 24)}{(x^2 - 4)^3} \quad f'(x) = \frac{4x}{(x+1)^3}, \quad f''(x) = \frac{4(1-2x)}{(x+1)^4}$$

$$(6) \quad (5)$$

$$f'(x) = -\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4}, \quad f''(x) = 12 \frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)^5} \quad f'(x) = \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}, \quad f''(x) = \frac{6x}{(x+1)^4}$$

$$(8) \quad (7)$$

$$f'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x^{1.5}}, \quad f''(x) = \frac{3 \ln x - 8}{4x^{2.5}} \quad f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{2 \ln x - 3}{x^3}$$

$$(10) \quad (9)$$

$$f'(x) = x(2 \ln x + 1), \quad f''(x) = 2 \ln x + 3 \quad f'(x) = \ln x + 1, \quad f''(x) = \frac{1}{x}$$

$$(12) \quad (11)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x}(\ln x + 1), \quad f''(x) = \frac{-2 \ln x}{x^2} \quad f'(x) = \frac{1}{2(2-x)}, \quad f''(x) = \frac{1}{(4-2x)^2}$$

$$(13)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x} \left[\frac{(\ln x)^4 - 1}{(\ln x)^3} \right], \quad f''(x) = -\frac{2}{x^2} \left\{ \frac{(\ln x)^5 - (\ln x)^4 - (\ln x) - 3}{(\ln x)^4} \right\}$$

$$(15) \quad (14)$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{x^2 - x - 2}{x^2} \right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{5x + 2}{x^4} \right) \quad f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1 + 2x}{x^4} \right)$$

$$(16)$$

$$f'(x) = e^{-2x^2} (1 - 4x^2), \quad f''(x) = -4xe^{-2x^2} (3 - 4x^2)$$

$$(17)$$

$$f'(x) = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9 \cdot \sqrt[3]{x^4}}$$

(18)

$$f'(x) = \frac{2x}{3\sqrt{(x^2-1)^2}}, \quad f''(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{-\frac{1}{3}x^2 - 1}{(x^2-1)^{5/3}}$$

(19)

$$f'(x) = \frac{2-5x}{3\sqrt{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9} \cdot \frac{1+5x}{\sqrt{x^4}}$$

(20)

$$f'(x) = \cos(x^3) \cdot 3x^2, \quad f''(x) = -9x^4 \sin(x^3) + 6x \cdot \cos(x^3)$$

(21)

$$f'(x) = -\sin(x^4) \cdot 4x^3, \quad f''(x) = -16x^6 \cos(x^4) - 12x^2 \cdot \sin(x^4)$$

(22)

$$f'(x) = 3\sin^2 x \cdot \cos x, \quad f''(x) = 6\sin x \cos^2 x - 3\sin^3 x$$

(23)

$$f'(x) = \frac{2x}{\cos^2(x^2)}, \quad f''(x) = \frac{2 \cdot \cos^2(x^2) - 8x^2 \cos(x^2) \sin(x^2)}{\cos^4(x^2)}$$

(24)

$$f'(x) = \tan(x^2) \cdot (-2x), \quad f''(x) = \frac{-4x^2}{\cos^2(x^2)} - 2\tan(x^2)$$

(25)

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2-3x-2}}, \quad f''(x) = \frac{2x+3}{2(-x^2-3x-2)^{3/2}}$$

(27)

(26)

$$f'(x) = x^{\sin x} \left(\cos x \cdot \ln(x+1) + \frac{\sin x}{x+1} \right) \quad f'(x) = \frac{2x}{1+x^4}, \quad f''(x) = \frac{2-6x^4}{(1+x^4)^2}$$

(29)

(28)

$$f'(x) = (\cos x)^{\ln x} \cdot \left(\frac{\ln(\cos x)}{x} - \tan x \cdot \ln x \right) \quad f'(x) = (\sin x)^x (\ln(\sin x) + \cot x \cdot x)$$

פרק 9 - נגזרות של פונקציות מיוחדות

נגזרת הפונקציה ההפוכה

(1) הוכח, בעזרת כלל הנגזרת של הפונקציה ההפוכה, את הנוסחאות הבאות:

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (1) \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (2) \quad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad (3)$$

נגזרות מסדרים גבוהים, נוסחת לייבניץ

(2) חשב את הנגזרת ה- n , $f^{(n)}(x)$, של הפונקציות הבאות:

$$y = \frac{1}{x+a} \quad (1) \quad y = \frac{2x+3}{x^2-3x+2} \quad (2) \quad y = \frac{x}{(x^2-1)(x-2)} \quad (3) \quad y = \frac{x^4}{x^2-1} \quad (4)$$

(3) חשב את הנגזרת העשירית, $y^{(10)}$, של הפונקציות הבאות:

$$y = x^3 e^x \quad (1) \quad y = x^3 \sin 5x \quad (2)$$

נגזרת של פונקציה סתומה

(4) גזור את הפונקציות הסתומות הבאות ומצא את y' :

$$x^2 + y^5 - y = 1 \quad (1) \quad 4 \ln x + 10 \ln y = y^2 \quad (2) \quad xy = \sinh \frac{y}{x} \quad (3)$$

$$x^y - xy = 10 \quad (4) \quad x^y - y^x = 1 \quad (5) \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{xy} \quad (6)$$

(5) נתונה פונקציה סתומה $xy - y^3 + x^2 - x = 0$. מצא את ערך y בנקודה $y = 1$.

נגזרת של פונקציה הנתונה בצורה פרמטרית

(6) חשב את הנגזרת הראשונה והשנייה של הפונקציות הבאות הנתונות בצורה פרמטרית.

$$\begin{cases} x(t) = t \cos t \\ y(t) = t^2 - 1 \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = t \cos t \end{cases} \quad (1)$$

נגזרת של פונקציה מן הצורה $h(x)^{g(x)}$

(7) גזור את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = (\cos x)^{\ln x} \quad (3) \quad f(x) = (x+1)^{\sin x} \quad (2) \quad f(x) = (\sin x)^x \quad (1)$$

פתרונות

(2)

$$y^{(n)} = (-1)^n n! (x+a)^{-n-1} \quad (1)$$

$$y^{(n)} = (-1)^n n! (-5(x-1)^{-n-1} + 7(x-2)^{-n-1}) \quad (2)$$

$$y^{(n)} = (-1)^n n! \left(-\frac{1}{2}(x-1)^{-n-1} - \frac{1}{6}(x+1)^{-n-1} + \frac{2}{3}(x-2)^{-n-1} \right) \quad (3)$$

$$y' = 2x - \frac{1}{2} \left((x-1)^{-2} - (x+1)^{-2} \right) \quad (4)$$

$$y'' = 2 + \left((x-1)^{-3} - (x+1)^{-3} \right)$$

$$y^{(n)} = \frac{1}{2} (-1)^n n! \left((x-1)^{-n-1} - (x+1)^{-n-1} \right) \quad (n > 2)$$

(3)

$$(e^x \cdot x^3)^{(10)} = e^x [x^3 + 103x^2 + 456x + 120 \cdot 6] \quad (1)$$

$$(\sin 5x \cdot x^3)^{(10)} = -5^{10} x^3 \sin 5x + 6 \cdot 5^{10} x^2 \cos 5x + 54 \cdot 5^9 x \sin 5x - 24 \cdot 5^9 \cos 5x \quad (2)$$

(4)

$$y' = \frac{-y(x^2 + \cosh \frac{y}{x})}{x(x^2 - \cosh \frac{y}{x})} \quad (3) \quad y' = \frac{-4y}{x(10-2y^2)} \quad (2) \quad y' = \frac{2x}{1-5y^4} \quad (1)$$

$$y' = \frac{y - \sqrt{y}}{\sqrt{x-x}} \quad (6) \quad y' = \frac{y^x \ln y - x^{y-1} y}{x^y \ln x - y^{x-1} x} \quad (5) \quad y' = \frac{y(1-x^{y-1})}{x^y \ln x - x}$$

$$-\frac{1}{8}, -1 \quad (5)$$

(6)

$$y'(x) = \frac{\cos t - t \sin t}{1 - \cos t} \quad (1)$$

$$y''(x) = \frac{(-2 \sin t - t \cos t)(1 - \cos t) - \sin t(\cos t - t \sin t)}{(1 - \cos t)^3}$$

$$y'(x) = \frac{2t}{\cos t - t \sin t} \quad (2)$$

$$y''(x) = \frac{2(\cos t - t \sin t) - 2t(-2 \sin t - t \cos t)}{(\cos t - t \sin t)^3}$$

(7) ראה פתרון שאלות 37-39 בפרק 6.

פרק 10 - בעיות משיקים (המשמעות הגיאומטרית של הנגזרת)

(1) הישר $y = x + b$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = e^x$. מצא את b ואת נקודת ההשקה.

(2) הישר $y = 4x + b$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{2}{x^2} + 3$. מצא את b ואת נקודת ההשקה.

(3) הישר $y = 3x$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = x\sqrt{x} + b$. מצא את b ואת נקודת ההשקה.

(4) הישר $y = ax + \frac{1}{2}$ משיק לגרף הפונקציה $g(x) = \frac{2}{x+c}$ בנקודה $x = 0$. מצא את a ו- c .

(5) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \ln x$ בנקודה $x = e$.

(6) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = x^3 + 1$ בנקודה $x = 0$.

(7) מצא את משוואת המשיק למעגל $x^2 + y^2 = 25$ בנקודה $(3, 4)$.

(8) הפונקציות $y = \frac{1}{x}$ ו- $y = -\frac{1}{2}x^2 + k$ משיקות זו לזו. מצא את k ואת נקודת ההשקה.

(9) מצא את נקודת ההשקה ואת משוואת המשיק לגרף העקומה העובר דרך הנקודה הנתונה.

$$\text{(א) } y = x^2 - 2x + 1 \quad \text{ב) } y = \sqrt{x} \quad \text{בנקודה } (-3, 1)$$

(10) מצא את משוואת המשיקים המשותפים לפונקציות הבאות:

$$y = x^2 \quad \text{ו-} \quad y = -\frac{1}{4}x^2 - 5$$

(11) מצא את הזווית בין הפונקציות $y = f(x) = x^2$ ו- $y = g(x) = \frac{1}{x}$.

(12) מצא את הזווית בין המעגל $x^2 + y^2 = 8$ והפרבולה $y^2 = 2x$.

(13) הוכח שהאליפסה $x^2 + 2y^2 = 8$ וההיפרבולה $x^2 - y^2 = 2$ נחתכות בזווית ישרה.

פתרונות

(1) נקודת ההשקה היא $(0,1)$ ומשוואת המשיק היא $y = x + 1$.

(2) נקודת ההשקה היא $(-1,5)$ ומשוואת המשיק היא $y = 4x + 9$.

(3) נקודת ההשקה היא $(4,12)$ ו- $b = 4$.

(4) נקודת ההשקה היא $(0, \frac{1}{2})$ ומשוואת המשיק היא $y = -\frac{1}{8}x + \frac{1}{2}$.

(5) משוואת המשיק היא $y = \frac{1}{e}x$.

(6) משוואת המשיק היא $y = 1$.

(7) משוואת המשיק היא $y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$.

(8) נקודת ההשקה $(1,1)$, $k = 1.5$.

(9) א) $y = -2x + 1$, $(0,1)$, $y = 6x - 15$, $(4,9)$

ב) המשיק: $(9,3)$, $y = \frac{1}{6}x + \frac{3}{2}$.

(10) $y = 2x - 1$, $y = -2x - 1$

(11) 71.57°

(12) 71.56°

פרק 11 - כלל לופיטל

חשב את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x - 1} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 + 7} - 4}{\sqrt{x - 2} - 1} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x + 1} - \sqrt{x + 5}}{x - 4} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x + 1} - 2} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{3}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x^2 - 1} - \sqrt{x}}{x - 1} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - x^2 - 2x - 2}{2x^3} \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} \quad (a, b > 0) \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(x + 1) + x}{x} \quad (15)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)}{\frac{1}{x^2}} \quad (14)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{x^2 - 2x + 1} \quad (13)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)} \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax^2)}{bx^2} \quad (17)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{\cos x}}{x} \quad (21)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \quad (20)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \quad (19)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - \sin(x^2)}{x^4} \quad (24)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1 + x)}{x^3} \quad (23)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4} \quad (22)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \tanh x \quad (27)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x^2 + 3x)}{\arcsin(x^2 - 4x)} \quad (26)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x^2)}{x^4} \quad (25)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 + x + 3} \quad (30)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cosh x - 2}{1 - \cos 2x} \quad (29)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sinh x} \quad (28)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^2 + 2 \ln x - 3}{x} \quad (33)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x + x + 1}{e^x} \quad (32)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} \quad (31)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot e^x \quad (36)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} \quad (35)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{\ln(\tan x)} \quad (34)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \tan x \cdot \ln x \quad (39)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x} \quad (38)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \ln x \quad (37)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - 9) \cdot \ln(x - 3) \quad (42)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x \quad (41)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \cot x \quad (40)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) \quad (45)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left[\sqrt{1 + \frac{5}{x}} - 1 \right] \quad (44)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln \left(\frac{x+3}{x-3} \right) \quad (43)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x \quad (48)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln(3x) - \ln(\sin 5x)] \quad (47)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) \quad (46)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (ax)^x \quad (a > 0) \quad (51)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}} \quad (50)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} + x \quad (49)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x} \quad (54)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^{x^2} \quad (53)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (2x - 4)^{x-2} \quad (52)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x^2)^{\frac{1}{x^4}} \quad (57)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} \quad (56)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan 3x)^{\frac{1}{x}} \quad (55)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x+1)^{\cot x} \quad (60)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\tan x} \quad (59)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\tan x} \quad (58)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} \quad (63)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x^2)^{\cot^2 x} \quad (62)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x + \sin x)^{\tan x} \quad (61)$$

(2) כל אחד מהגבולות הבאים הוא מן הסוג $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$. הראה זאת והסבר מדוע למרות כך, כלל לופיטל אינו ישים,

לבסוף חשב את הגבול.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \sin x}{4x + \cos x} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (1)$$

פתרונות

(1)

$\frac{5}{6}$ (7)	$\frac{3}{2}$ (6)	$\frac{1}{6}$ (5)	4 (4)	$n-1$ (3)	$\frac{20}{17}$ (2)	$\frac{5}{6}$ (1)
2 (14)	$-\frac{1}{2}$ (13)	$\frac{1}{6}$ (12)	$\frac{1}{2}$ (11)	$\ln\left(\frac{a}{b}\right)$ (10)	1 (9)	$-\frac{3}{2}$ (8)
$\frac{1}{2}$ (21)	$\frac{1}{2}$ (20)	$\frac{1}{6}$ (19)	$\frac{a}{b}$ (18)	$\frac{a}{b}$ (17)	1 (16)	1 (15)
1 (28)	1 (27)	$-\frac{3}{4}$ (26)	$-\frac{1}{2}$ (25)	$-\frac{1}{3}$ (24)	$\frac{1}{3}$ (23)	$\frac{1}{8}$ (22)
0 (35)	∞ (34)	0 (33)	∞ (32)	$\frac{1}{2}$ (31)	$\frac{1}{2}$ (30)	$\frac{2}{3}$ (29)
0 (42)	0 (41)	0 (40)	0 (39)	0 (38)	0 (37)	1 (36)
$\frac{1}{2}$ (49)	$\ln\frac{3}{5}$ (48)	0.5 (47)	0 (46)	2.5 (45)	6 (44)	0 (43)
1 (56)	e^2 (55)	1 (54)	1 (53)	1 (52)	e (51)	$-\frac{1}{2}$ (50)
1 (63)	e (62)	1 (61)	1 (60)	$e^{-1/2}$ (59)	$e^{1/3}$ (58)	e^3 (57)
					$e^{-1/6}$ (65)	e (64)
						(2)
				0.75 (3)	0.25 (2)	1 (1)

פרק 12 - חקירת פונקציה

(1) חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה לפי הפירוט הבא: תחום הגדרה ורציפות, נקודות חיתוך עם הצירים*, זוגיות, אסימפטוטות אנכיות, אופקיות ומשופעות**, נקודות קיצון, תחומי עליה וירידה, נקודות פיתול***, תחומי קמירות וקעירות, גרף.

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2} \quad (3) \quad f(x) = x^4 - 2x^3 \quad (2) \quad f(x) = x(x-9)^2 \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad (6) \quad f(x) = \frac{x^3}{x^2-4} \quad (5) \quad f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x^2-4} \quad (9) \quad f(x) = \frac{x^2-1}{(x-2)(x-5)} \quad (8) \quad f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad (7)$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (12) \quad f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (11) \quad f(x) = \frac{x^3-x^2}{x^2-1} \quad (10)$$

$$f(x) = \ln^2 x + 2\ln x - 3 \quad (15) \quad f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}} \quad (14) \quad f(x) = x \cdot \ln x \quad (13)$$

$$f(x) = x - e^x \quad (18) \quad f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x} \quad (17) \quad f(x) = 4\ln^2 x - 4\ln x - 3 \quad (16)$$

$$f(x) = x \cdot e^{-2x^2} \quad (21) \quad f(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}} \quad (20) \quad f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad (19)$$

$$f(x) = \left(\sqrt[3]{x^2} - 1\right)^2 \quad (24) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2}(1-x) \quad (23) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad (22)$$

$$f(x) = x - 2\arctan x \quad (27) \quad f(x) = \frac{|x-3|}{x-2} \quad (26) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2-1} \quad (25)$$

$$f(x) = 8\cos x + 2\cos 2x - 3 \quad (30) \quad f(x) = 2\cos^2 x - \sin 2x \quad (29) \quad f(x) = \arcsin(\sin x) \quad (28)$$

$(0 \leq x \leq 2\pi) \quad (0 \leq x \leq \pi)$

הערות:

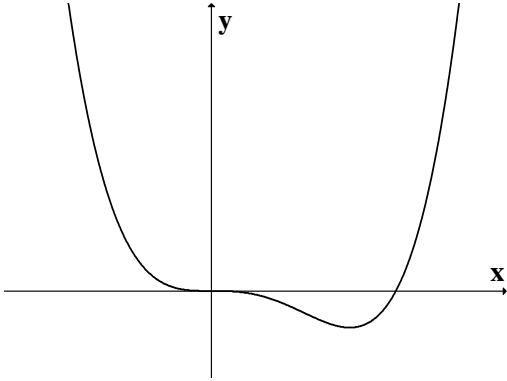
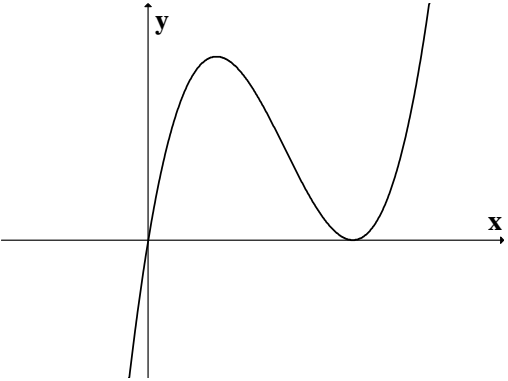
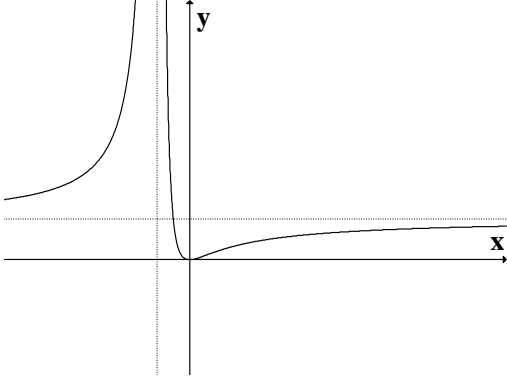
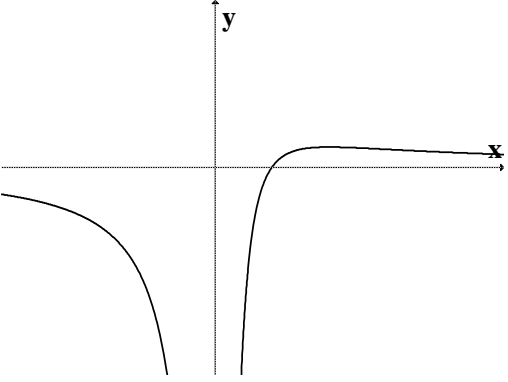
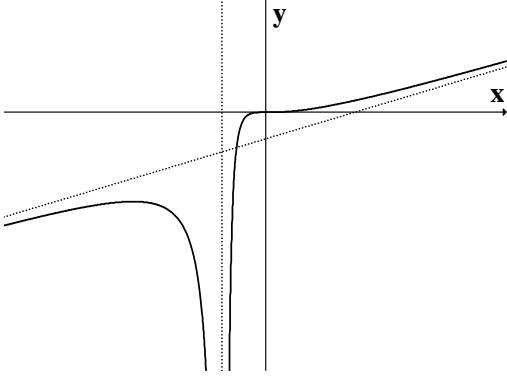
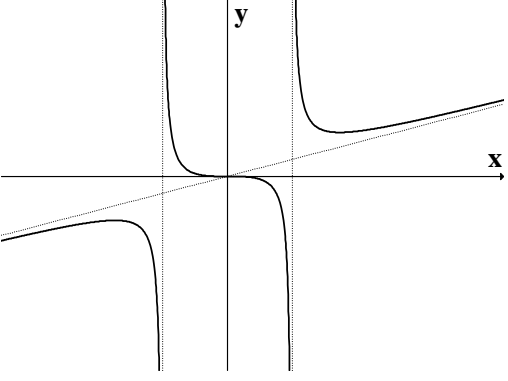
* בשאלה 27 אין צורך למצוא חיתוך עם ציר x . בשאלה 18 מצא את החיתוך רק לאחר השרטוט.

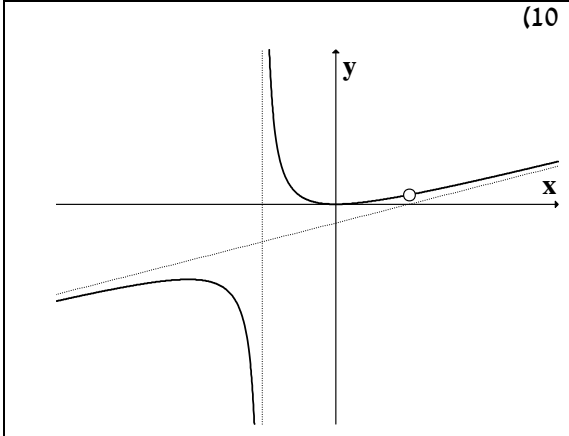
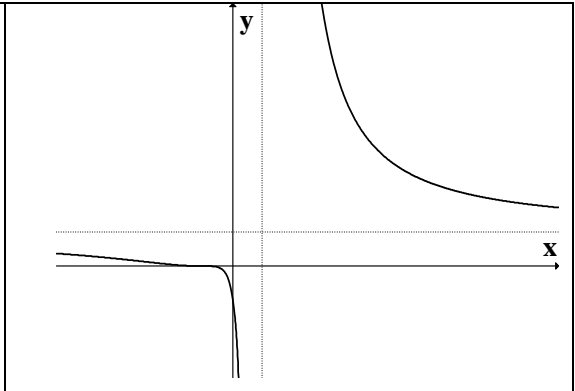
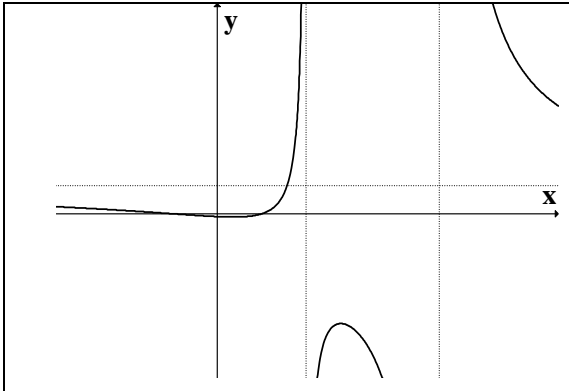
** בתרגילים 1,2,28,29,30 אין צורך למצוא אסימפטוטות (וגם אין).

*** בתרגילים 9,17 אין צורך למצוא נקודות פיתול אלא אם כן למדתם ניוטון רפסון. בתרגיל 8 אין צורך למצוא נקודות פיתול אלא אם כן למדתם לפתור משוואה ממעלה שלישית.

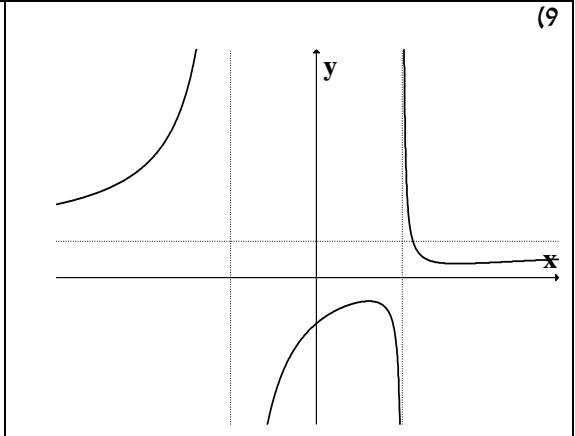
פתרונות

(1)

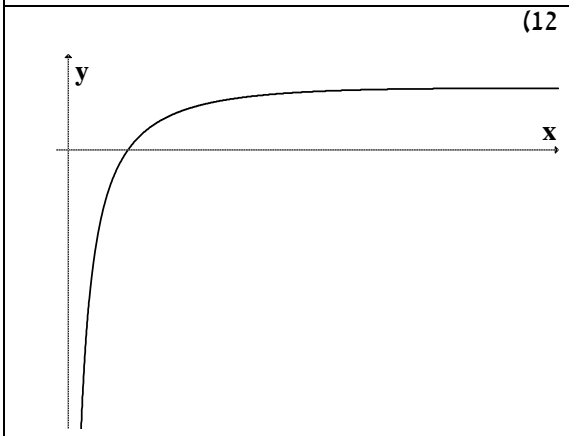
<p>(2)</p> 	<p>(1)</p> 
<p>(4)</p> 	<p>(3)</p> 
<p>(6)</p> 	<p>(5)</p> 
<p>(8)</p>	<p>(7)</p>



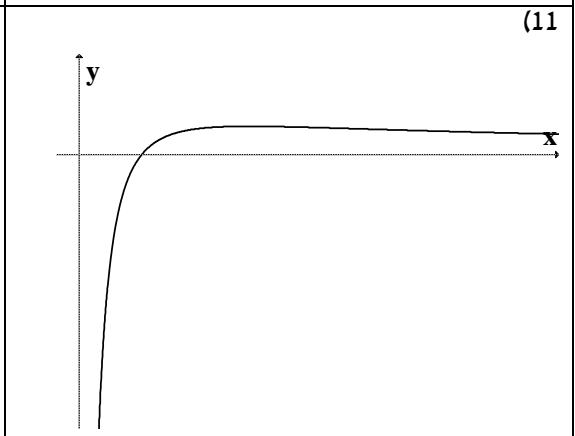
(10)



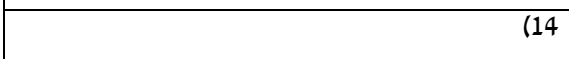
(9)



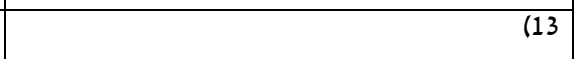
(12)



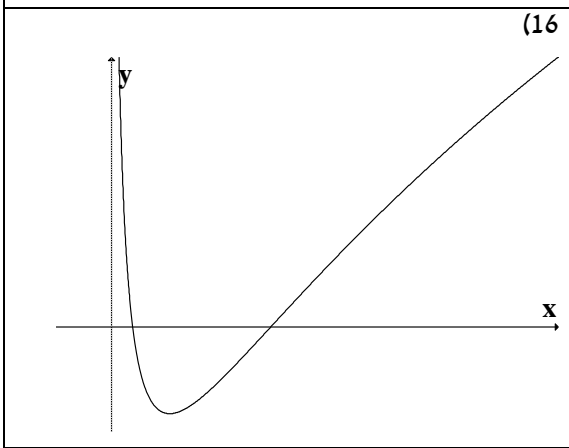
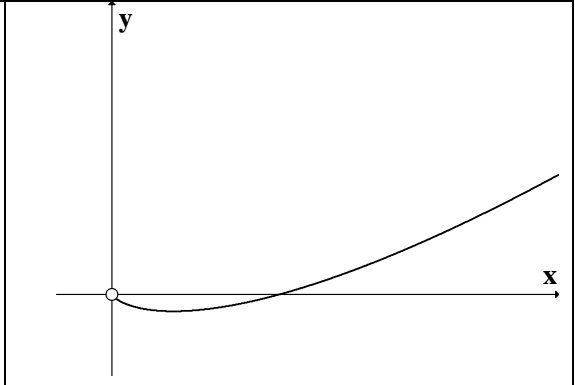
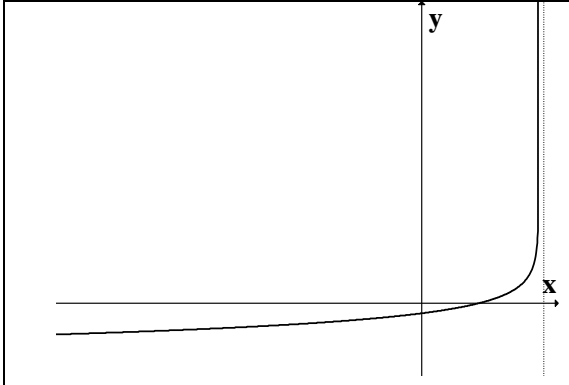
(11)



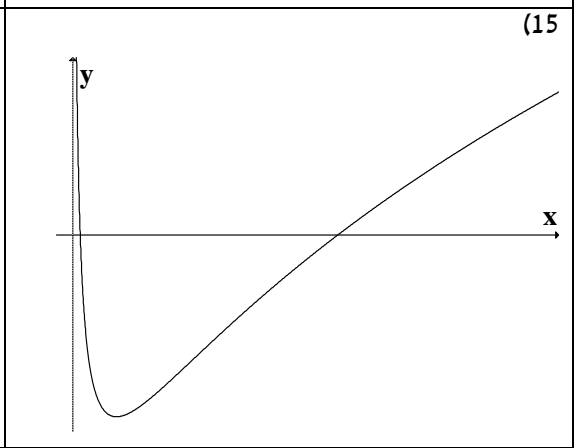
(14)



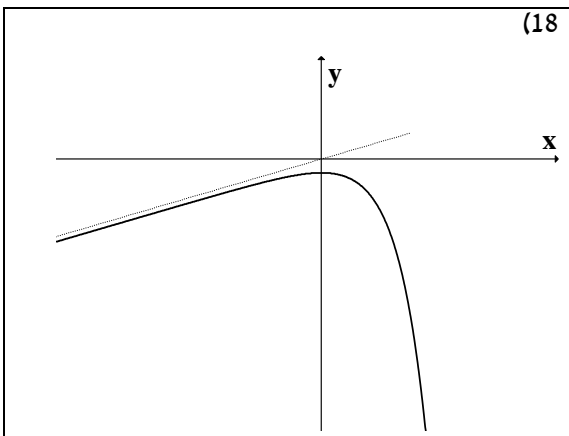
(13)



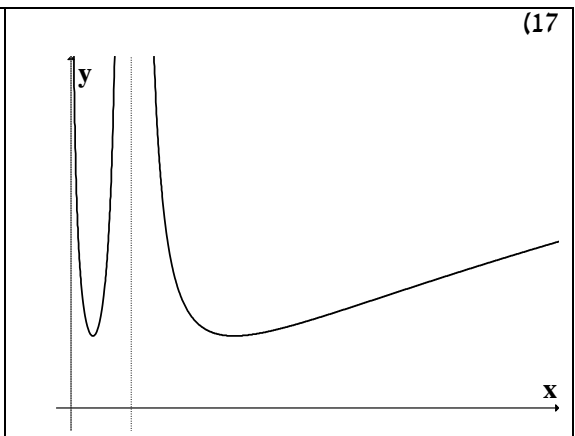
(16)



(15)



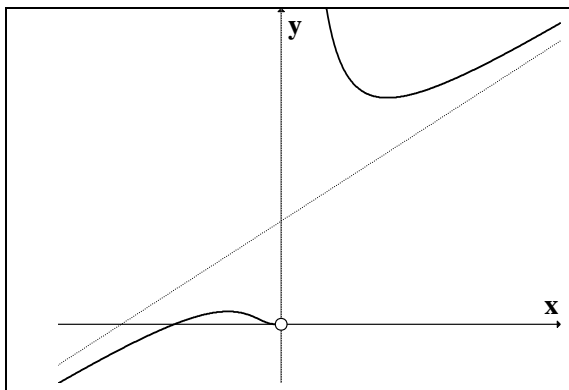
(18)



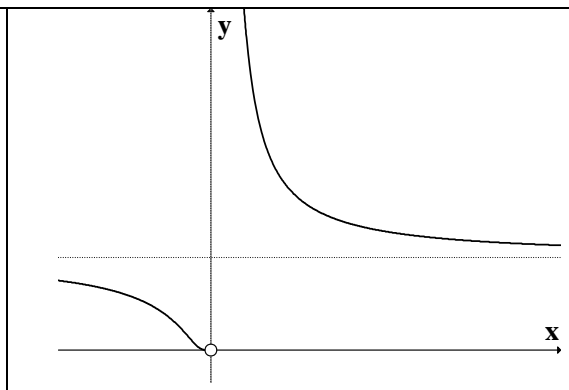
(17)

(20)

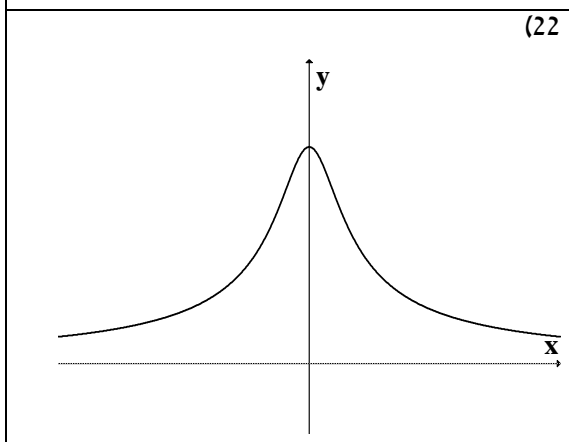
(19)



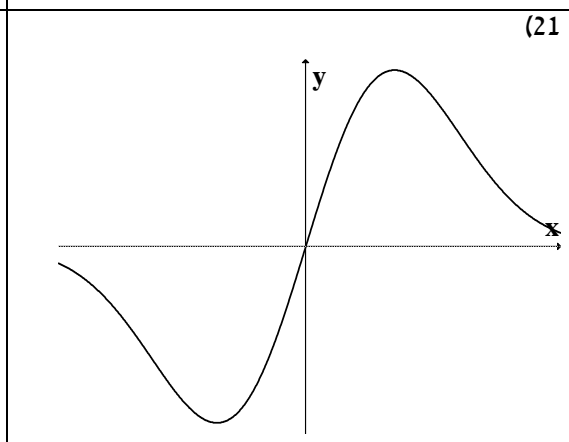
(22)



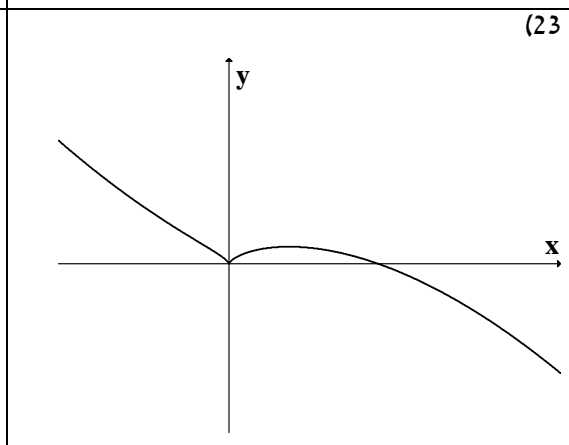
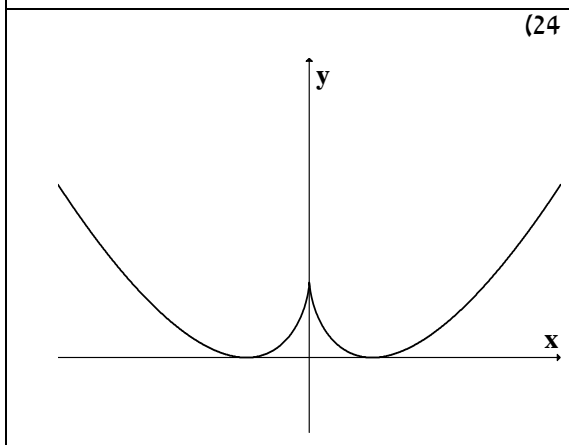
(21)

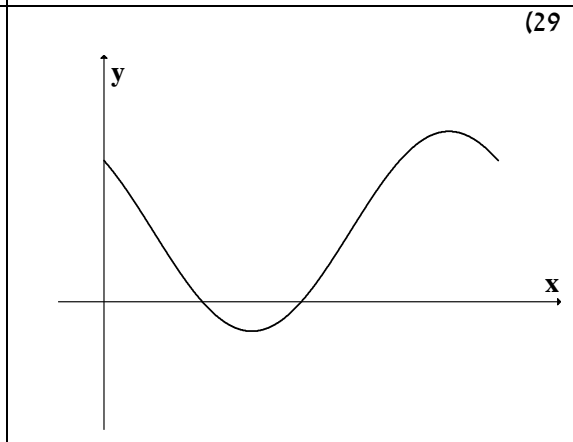
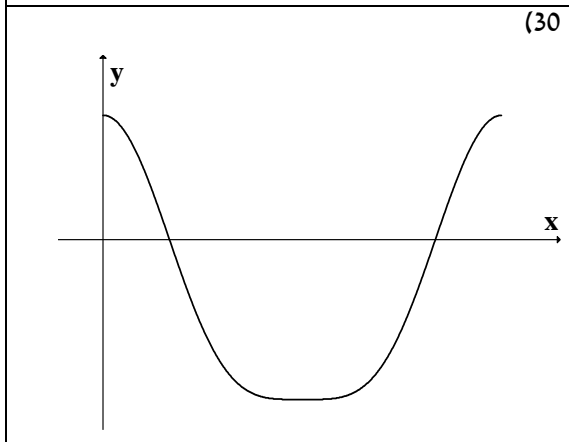
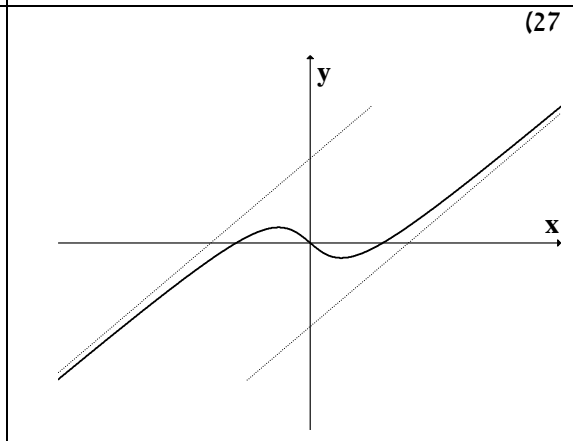
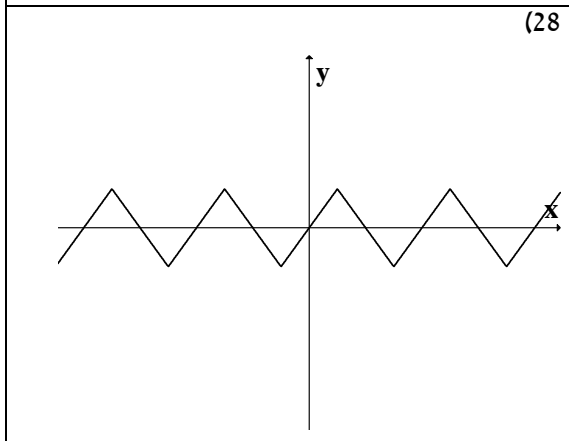
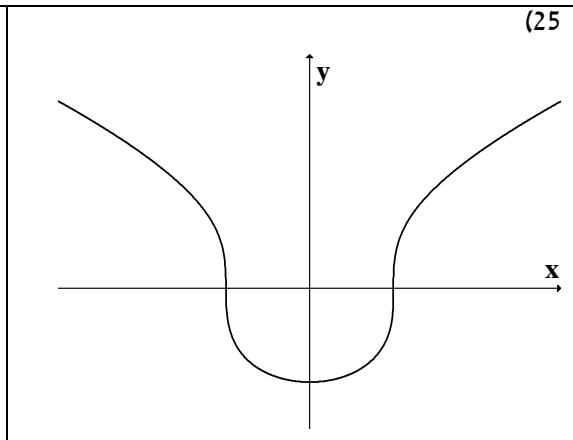
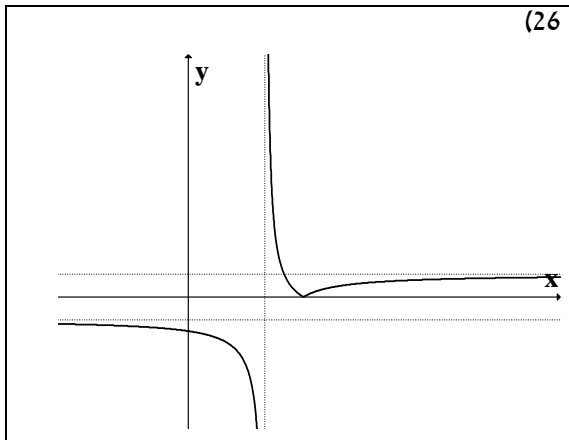


(24)



(23)





פרק 13 - חקירת פונקציה - "שאלות מסביב"

(1)

(א) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + x^2$. ידוע שהנקודה $x = 1$ נקודת קיצון. מצא את הקבוע a .

(ב) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + bx^2$. ידוע שהנקודה $(1, 2)$ נקודת קיצון. מצא את הקבועים a, b .

(ג) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + x^2$. ידוע שהנקודה $x = 1$ נקודת פיתול. מצא את הקבוע a .

(ד) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + bx^2$. ידוע שהנקודה $(1, 2)$ נקודת פיתול. מצא את הקבועים a, b .

(ה) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + x^2$ שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x = 3$ הוא 33. מצא את a .

(ו) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + bx^2$. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $(3, 9)$ הוא 12. מצא את a, b .

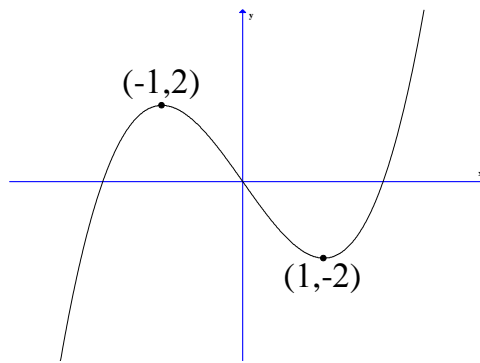
(ז) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{ax^3 + x^2}{2x^3 + x + 6}$. ידוע שהישר $y = 4$ אסימפטוטה לגרף הפונקציה. מצא את a .

(ח) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 4}{x}$. ידוע שהישר $y = 0.5x + 1$ אסימפטוטה לגרף הפונקציה. מצא את a ואת b .

(ט) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{x^2 + ax + 6}$. ידוע שהישר $x = 1$ אסימפטוטה לגרף הפונקציה. מצא את a .

(2) לפניך גרף הפונקציה $f(x) = x^3 - 3x$

- א. מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = 5$.
- ב. מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = 2$.
- ג. מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = 0.5$.
- ד. עבור איזה ערך של k למשוואה $f(x) = k$ יש בדיוק פתרון אחד.
- ה. עבור איזה ערך של k למשוואה $f(x) = k$ יש בדיוק שני פתרונות.
- ו. עבור איזה ערך של k למשוואה $f(x) = k$ יש בדיוק שלושה פתרונות.
- ז. האם קיים ערך של k עבורו למשוואה $f(x) = k$ אין פתרון.
- ח. מצא את התחומים בהם הפונקציה היא חח"ע.



(3) הוכח את אי השוויונים הבאים לגבי התחום הרשום לידם :

$$(1) \quad (-\infty < x < \infty) \quad 8x^3 \leq 3x^4 + 6x^2 \quad (2) \quad (0 < x < \frac{\pi}{3}) \quad x < 2 \sin x$$

$$(3) \quad (x > 0) \quad \sqrt{x+1} < 1 + \frac{x}{2} \quad (4) \quad (x \geq 0) \quad \ln(x+1) \leq x$$

פתרונות

(1)

$$a = -\frac{1}{3} \quad (\lambda)$$

$$b = 6, a = -4 \quad (\text{ב})$$

$$a = -\frac{2}{3} \quad (\aleph)$$

$$a = \frac{2}{3}, b = -1 \quad (\iota)$$

$$a = 1 \quad (\eta)$$

$$b = 3, a = -1 \quad (\tau)$$

$$a = -7 \quad (\upsilon)$$

$$a = 0.5 \quad (\theta)$$

$$a = 8 \quad (\rho)$$

(2)

$$3 \quad (\lambda)$$

$$2 \quad (\text{ב})$$

$$1 \quad (\aleph)$$

$$-2 < k < 2 \quad (\iota)$$

$$k = \pm 2 \quad (\eta)$$

$$k < -2 \text{ או } k > 2 \quad (\tau)$$

$$-1 < x < 1 \text{ או } x < -1 \quad (\theta)$$

$$\aleph \quad (\rho)$$

$$x > 1 \text{ או}$$

פרק 14 - מקסימום ומינימום מוחלטים של פונקציה

(1) מצא את נקודות המינימום המוחלט והמקסימום המוחלט של הפונקציות הבאות בתחומים הרשומים לידן (אם יש כאלה):

$$f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x + 5} \quad (2) \qquad (-1 \leq x \leq 3) \quad f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x \quad (1)$$

$$\left(\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{7}{2}\right) f(x) = \begin{cases} 4x - 2 & x < 1 \\ (x-2)(x-3) & x \geq 1 \end{cases} \quad (4) \qquad (-1 \leq x \leq 20) \quad f(x) = x^{2/3}(20-x) \quad (3)$$

$$(-5 < x < -1) \quad f(x) = \frac{x^2}{x+1} \quad (6) \qquad (-5 \leq x \leq 1) \quad f(x) = 1 + |9 - x^2| \quad (5)$$

$$(-\infty < x < \infty) \quad f(x) = x^3 - 9x + 1 \quad (7)$$

(2) הוכח את אי השוויונים שמימין לגבי התחום הרשום בסוגריים משמאל.

$$(x \leq 1) \quad 0 \leq x^2 e^{x-1} \leq 1 \quad (3) \qquad (x \geq 0) \quad x e^{-\sqrt{x}} \leq 1 \quad (2) \qquad (x \text{ לכל}) \quad x^3 e^{-x} \leq \frac{27}{e^3} \quad (1)$$

פתרונות

(1)

(1) $(-1, -7)$ מינימום מוחלט, $(3, 9)$ מקסימום מוחלט.

(2) $(-1, 0)$ מינימום מוחלט, $(5, 0)$ מינימום מוחלט, $(2, 3)$ מקסימום מוחלט.

(3) $(0, 0)$ מינימום מוחלט, $(20, 0)$ מינימום מוחלט, $(8, 48)$ מקסימום מוחלט.

(4) $(2.5, -0.25)$ מינימום מוחלט, $(1, 2)$ מקסימום מוחלט.

(5) $(-3, 1)$ מינימום מוחלט, $(-5, 17)$ מקסימום מוחלט.

(6) $(-2, -4)$ מקסימום מוחלט. אין מינימום מוחלט.

(7) אין מקסימום ואין מינימום.

הערת סימון:

$$[a, b] \Leftrightarrow a \leq x \leq b \quad , \quad (a, b) \Leftrightarrow a < x < b \quad , \quad [a, b) \Leftrightarrow a \leq x < b$$

פרק 15 - בעיות מקסימום ומינימום

הערה: בפרק זה, סומנו התרגילים הקשים יותר בכוכבית *

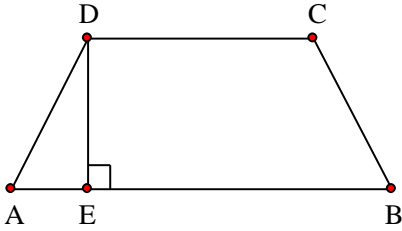
בעיות בהנדסת המישור

(1) בטרפז שווה-שוקיים $ABCD$ ($AB \parallel CD$) אורך השוק

הוא 4 ס"מ ואורך הבסיס הקטן הוא 6 ס"מ.

DE הוא הגובה מקדקוד D (ראה ציור).

מה צריך להיות אורך הקטע DE כדי ששטח הטרפז יהיה מקסימלי?



(2) נתון מלבן $ABCD$. נסמן ב- x את אחת מצלעות

המלבן (ראה ציור).

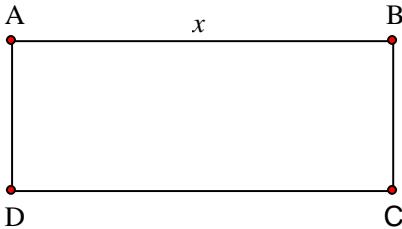
(א) אם היקף המלבן הוא 60 ס"מ בטא באמצעות x

את שטח המלבן.

(ב) אם היקף המלבן הוא p מצא מה צריכים להיות

אורכי צלעות המלבן כדי ששטחו יהיה מקסימלי

(הבע את אורכי הצלעות באמצעות p).



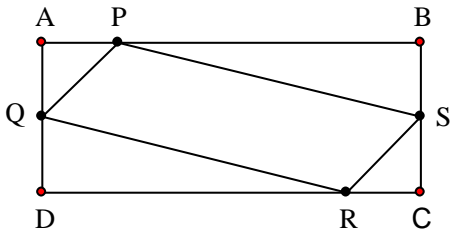
(3) נתון מלבן $ABCD$ כך ש- $AD = BC = 5$ ס"מ,

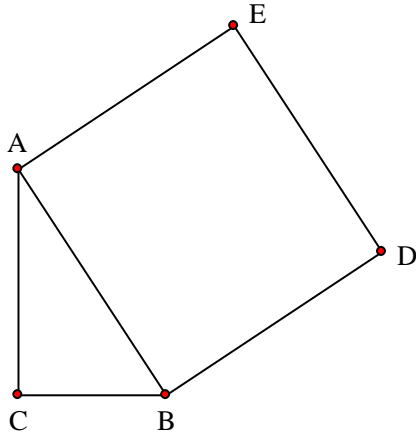
$AB = CD = 10$ ס"מ. על צלעות המלבן מקצים

קטעים: $AP = AQ = CS = CR = x$ (ראה ציור).

מה צריך להיות ערכו של x כדי ששטח

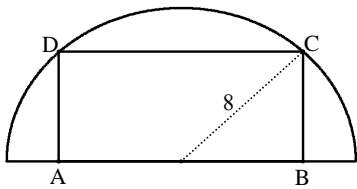
המקבילית $PQRS$ יהיה מקסימלי?





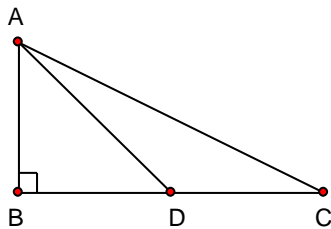
(4)

במשולש ישר זווית ΔABC ($\angle C = 90^\circ$) סכום אורכי הניצבים הוא 8 ס"מ. על היתר AB בונים ריבוע ABDE. מה צריכים להיות אורכי הניצבים, כדי ששטח המחומש AEDBC יהיה מינימלי.



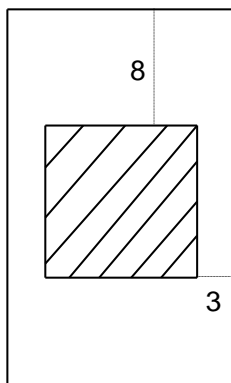
(5)

בחצי עיגול שרדיוסו 8 ס"מ חוסמים מלבן ABCD, כך שהצלע AB של המלבן מונחת על הקוטר, והקדקודים C ו-D מונחים על הקשת (ראה ציור). מה צריך להיות אורך הצלע AB כדי ששטח המלבן יהיה מקסימלי?



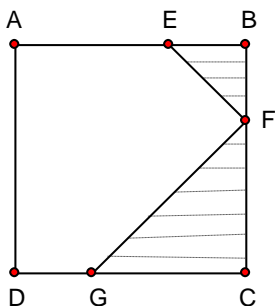
(6)

במשולש ישר-זווית ΔABC ($\angle B = 90^\circ$), סכום אורכי הניצבים הוא 30 ס"מ. AD הוא תיכון לניצב BC (ראה ציור). חשב מה צריכים להיות אורכי הניצבים, על מנת שריבוע אורך התיכון יהיה מינימלי.



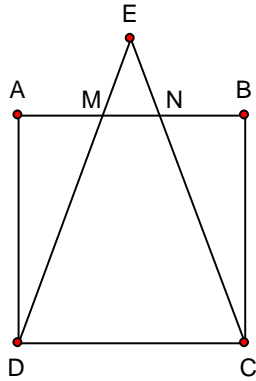
(7) בחוברת פרסום, שטח כל עמוד הוא 600 סמ"ר.
רוחב השוליים בראש העמוד ובתחתיתו הוא 8 ס"מ,
ורוחב השוליים בצדדים הוא 3 ס"מ.
מצא מה צריך להיות האורך והרוחב של כל עמוד,
כדי שהשטח המיועד לדפוס יהיה מקסימלי (השטח
המקווקו בציר).

(8) בריבוע ABCD הנקודות E, F, G נמצאות על הצלעות
= CG, BE = BF - כך ש- DC, BC, AB
CF
(ראה ציור).



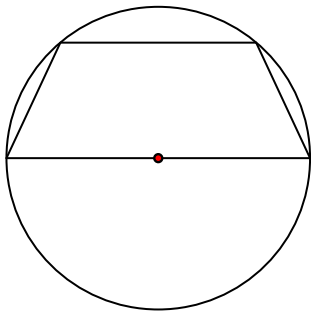
נתון כי האורך של צלע הריבוע הוא 6 ס"מ.
א. סמן ב- x את BF ואת BE, והבע באמצעות x את
הסכום של שטחי המשולשים EBF ו-FCG (השטח
המקווקו בציר).
ב.1. מצא את x שעבורו סכום שטחי המשולשים הוא
מינימלי.
ב.2. חשב את הסכום המינימלי של שטחי המשולשים.

(9) נתון ריבוע ABCD שאורך צלעו 10 ס"מ. E היא נקודה



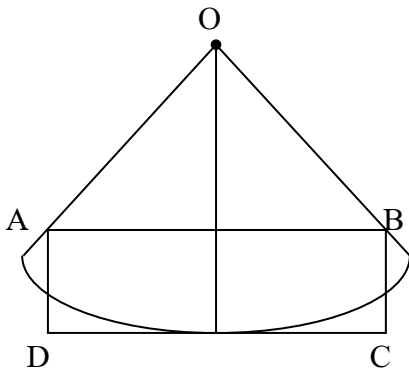
כלשהי מחוץ לריבוע, כך שהמשולש DEC הוא שוו"ש ($ED = EC$). שוקי המשולש חותכים את הצלע AB בנקודות M ו-N (ראה ציור). מצא מה צריך להיות אורך הקטע AM כדי שהסכום של שטחי המשולשים BNC , AMD , EMN יהיה מינימלי.

(10) נתון מעגל שרדיוסו R. במעגל זה חסום טרפז שוו"ש,

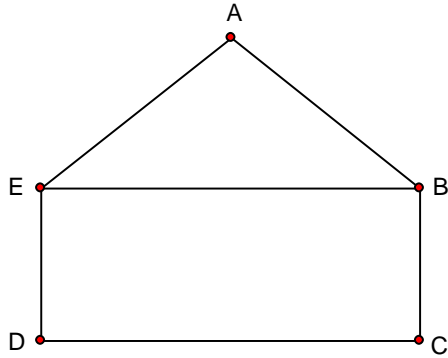


כך שהבסיס הגדול של הטרפז הוא קוטר במעגל (ראה ציור). מבין כל הטרפזים החסומים באופן זה, הבע באמצעות R את אורך הבסיס הקטן בטרפז ששטחו מקסימלי.

(11) נתונה גזרה של רבע עיגול שמרכזו O ורדיוסו 10 ס"מ.

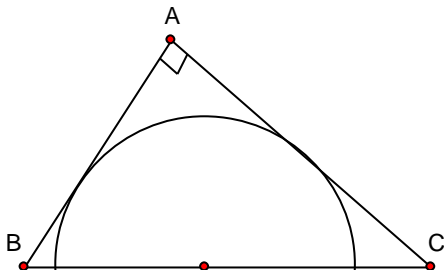


בונים מלבן ABCD, כך שרבע המעגל משיק לצלע DC בנקודת האמצע שלה, והקודקודים A ו-B נמצאים על הרדיוסים התוחמים את הגזרה (ראה ציור). מבין כל האלכסונים של המלבנים ABCD שנוצרים באופן זה, מצא את אורך האלכסון הקצר ביותר.

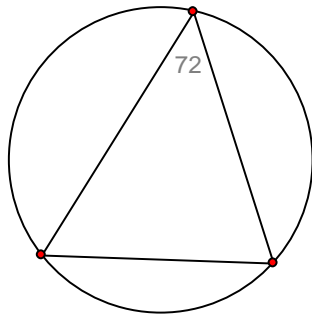


(*12) ABCDE הוא מחומש המורכב ממשולש ABE וממלבן EBCD (ראה ציור).

נתון: $BC = 2$ ס"מ, $AB = AE = 4$ ס"מ. מצא את השטח של המחומש ששטחו מקסימלי.



(*13) מתבוננים בכל המשולשים ישרי הזווית ABC החוסמים חצי מעגל שרדיוסו R כמתואר בציור. מהן זוויות המשולש שסכום הניצבים שלו הוא מינימלי?



(*14) במעגל שרדיוסו R חסומים משולשים כך שהגודל של

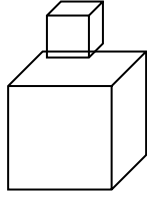
אחת הזוויות בכל אחד מהמשולשים הוא $\frac{2\pi}{5}$.

מצא את הזוויות במשולש בעל ההיקף המקסימלי.

בעיות בהנדסת המרחב

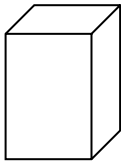
(15) גובהו של "מגדל" הבנוי שמתו קוביות (לאו דווקא

שוות) הוא 8 ס"מ. מה צריך להיות אורך המקצוע ש
הקובייה התחתונה כדי שנפח המגדל (סכום נפחי
הקוביות) יהיה מינימלי ?



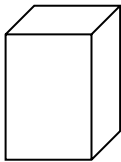
(16) בונים תיבה שגובהה y ס"מ, ובסיסה ריבוע, שאורך

צלעו x ס"מ (ראה ציור), כך שההיקף של כל אחת
מהדפנות הצדדיות שווה ל- 12 ס"מ. מה צריך להיות
אורך צלע הבסיס כדי שנפח התיבה יהיה מקסימלי?



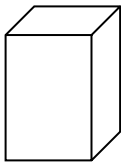
(17) יש לבנות תיבה פתוחה מלמעלה, שבסיסה ריבוע

ושטח פניה 75 סמ"ר (במקרה זה שטח הפנים מורכב
מבסיס אחד ומארבע פאות צדדיות). מכל התיבות
שאפשר לבנות, מצא את ממדי התיבה (צלע הבסיס
וגובה) שנפחה מקסימלי.



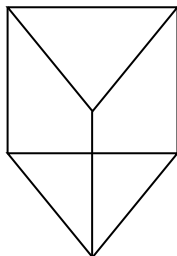
(18) יש להכין מחוט תיל "שלד" (מסגרת) של תיבה,

שבסיסה ריבוע ונפחה 1000 סמ"ק. מהו האורך
המינימלי של החוט הנחוץ ליצירת התיבה?

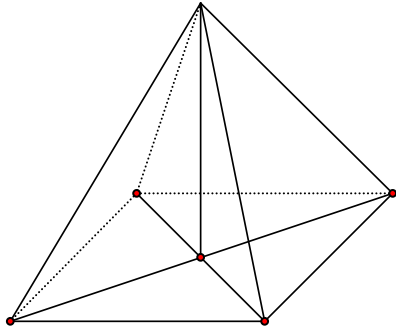


(19) מחוט שאורכו a ס"מ יש לבנות מנסרה משולשת

ישרה, שבסיסה הוא משולש שווה צלעות.
מצא איזה חלק מאורך החוט יש להקצות לצלע
הבסיס x ואיזה חלק לגובה y כדי שיתקיים :
א. שטח המעטפת של המנסרה יהיה מקסימלי.



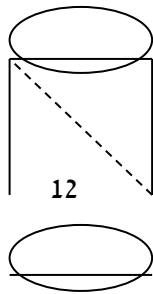
ב. נפח המנסרה יהיה מקסימלי.



(20) מכל הפירמידות המרובעות, המשוכללות והישרות, שאורך המקצוע הצדדי שלהן הוא a , מצא את נפחה של הפירמידה בעלת הנפח המקסימלי.

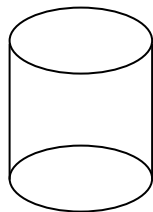
(21) מכל הפירמידות הישרות, שבסיסן ריבוע ושטח הפנים שלהן הוא 200 סמ"ר, חשב את נפחה של הפירמידה בעלת הנפח המקסימלי.

(22) אלכסון החתך הצירי של גליל ישר הוא 12 ס"מ (ראה ציור). מצא מה צריכים להיות גובה הגליל ורדיוס בסיסו כדי שנפחו יהיה מקסימלי.



(23) נתון מיכל גלילי פתוח מלמעלה שקיבולו 64 מ"ק.

המיכל עשוי כולו מפח. הראה כי שטח הפח הוא מינימלי כאשר רדיוס הבסיס הוא $\frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}$ מטר.



בעיות בפונקציות וגרפים

(25) מנקודה A, הנמצאת על גרף הפונקציה

$$y = -x^2 + 5x,$$

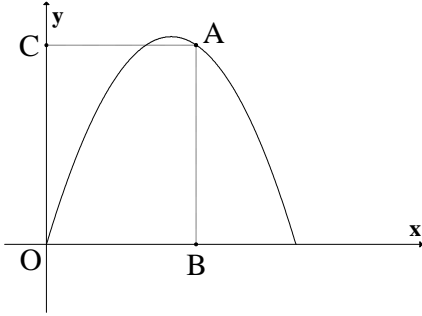
מלבן ABOC (ראה ציור).

א. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שהיקף

המלבן יהיה מקסימלי?

ב. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שהיקף

המלבן יהיה מינימלי?

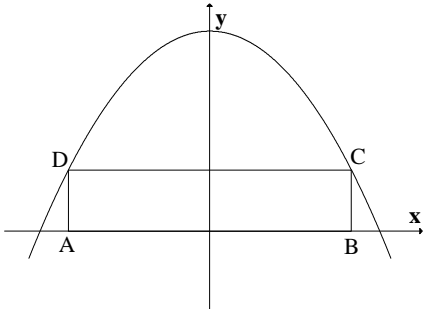


(26) בפרבולה $y = 9 - x^2$ חוסמים מלבן ABCD, כך

שהצלע AB מונחת על ציר ה-x (ראה ציור).

מה צריך להיות אורך הצלע CD כדי ששטח המלבן

יהיה מקסימלי?



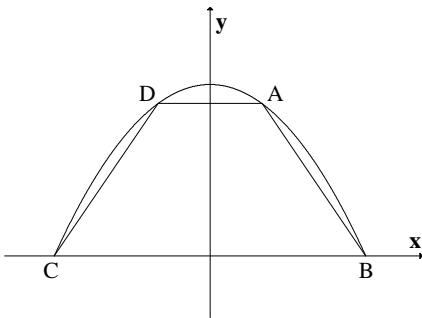
(27) טרפז ABCD חסום בין גרף הפרבולה $y = 9 - x^2$

לבין ציר ה-x (ראה ציור).

א. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי ששטח

הטרפז ABCD יהיה מקסימלי?

ב. חשב את השטח המקסימלי של טרפז ABCD.



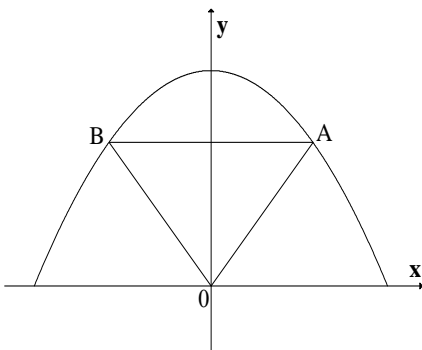
(28) נתונה הפרבולה $y = -x^2 + 12$. ישר המקביל לציר ה-

x חותך את הפרבולה בנקודות A ו-B (ראה ציור).

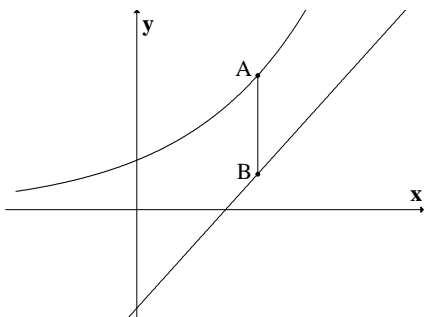
מחברים את הנקודות A ו-B עם ראשית הצירים, O.

א. מה צריך להיות אורך הקטע AB כדי ששטח

המשולש AOB יהיה מקסימלי?



ב. מהו השטח המקסימלי של המשולש AOB ?



(29) לפניך גרף של הפונקציה $y = e^x$ וגרף של הישר

$$y = e \cdot x - 2$$

הגרפים בנקודות A ו-B (ראה ציור).

א. מצא לאילו ערכי x אורך הקטע AB יהיה מינימלי.

ב. האם יש ערך של x שעבורו אורך הקטע AB הוא

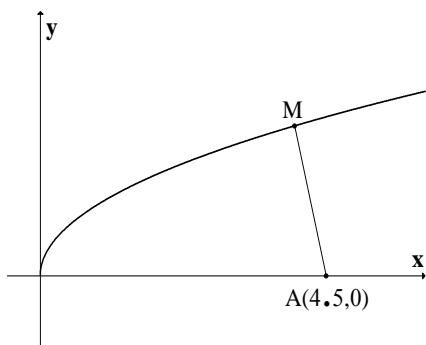
מקסימלי?

(31) נתון גרף הפונקציה $y = \sqrt{x}$. על ציר ה-x נתונה

הנקודה $A(4.5, 0)$ (ראה ציור).

מצא על גרף הפונקציה נקודה M, כך שריבוע המרחק

AM יהיה מינימלי.



(32) מצא על הישר $f(x) = 3x - 4$ את הנקודה הקרובה

ביותר לנקודה $(0, 1)$.

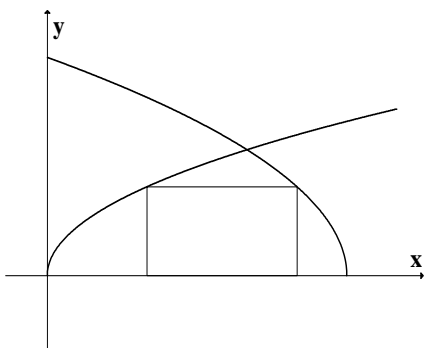
(33) בציור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:

$$g(x) = \sqrt{36 - 6x}, \quad f(x) = \sqrt{3x}$$

מלבן חסום בין הגרפים של הפונקציות ובין ציר ה-x,

כמתואר בציור. מצא את השטח הגדול ביותר

האפשרי למלבן שחסום באופן זה.

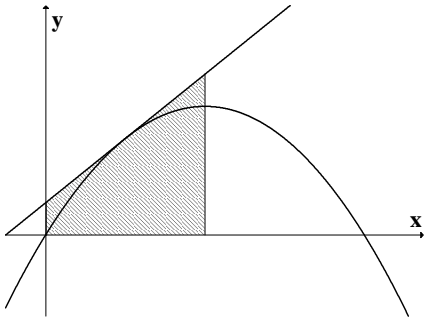


(*34) דרך איזו נקודה על הפרבולה $y = -x^2 + 2x$ צריך

להעביר משיק, כדי ששטח הטרפז, הנוצר על ידי

המשיק והישרים: $x = 0$, $x = 1$ ו- $y = 0$ (השטח

המקוקו שבציור) יהיה מינימלי?



(*35) נקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $y = x^2$ ברביע

הראשון. A היא הנקודה $(0, a)$ כאשר ידוע כי

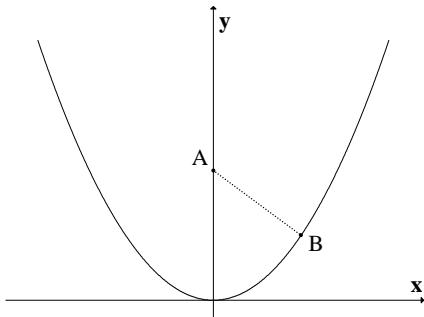
$a > 0.5$ (ראה ציור).

א. בטא באמצעות a את שיעורי הנקודה B, שעבורה

המרחק AB הוא מינימלי.

ב. מצא עבור איזה ערך של a המרחק המינימלי

הוא 2.



(*36) נתונה הפרבולה $y = x^2$, ונתון משיק לפרבולה

שמשוואתו היא $y = 6x - 9$. בנקודה (t, t^2) שעל

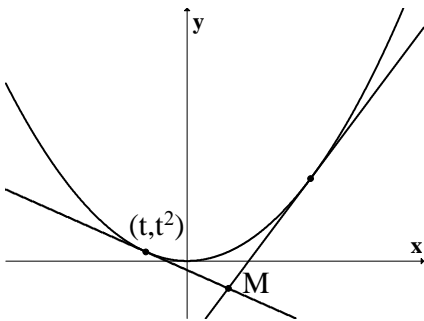
הפרבולה מעבירים משיק נוסף לפרבולה.

המשיקים נחתכים בנקודה M (ראה ציור).

א. הבע את משוואת המשיק הנוסף באמצעות t.

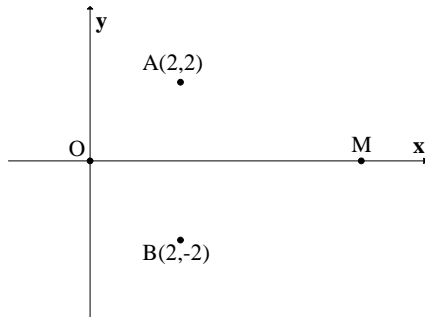
ב. מצא את t שעבורו אורך הקטע, המחבר את

הנקודה M עם קודקוד הפרבולה יהיה מינימלי.



(37) במערכת צירים נתונות הנקודות $A(2, 2)$ ו-

$B(2, -2)$. ראשית הצירים היא בנקודה M . O היא נקודה על ציר ה- x בתחום $x > 0$. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה M , כדי שהסכום $MA + MB$ יהיה מינימלי?



פתרונות

(1) $AE = 1.7 \text{ cm}$. א. (2) $(30 - x)$. ב. כל צלע שווה ל- $0.25p$. (3) $x = 3.75 \text{ cm}$.

(4) $AC = BC = 4 \text{ cm}$. (5) $AB = 2\sqrt{32} \text{ cm}$. (6) $B = 6 \text{ cm}, BC = 24 \text{ cm}$. (7) אורך: 40 ס"מ

רוחב: 15 ס"מ. (8) א. $S = x^2 - 6x + 18$. ב. 1. $x = 3$. ב. 2. 9 סמ"ר. (9) $AM = 5/\sqrt{2}$.

(10) בסיס קטן R . (11) $4\sqrt{5} \text{ cm}$. (12) $12\sqrt{3}$ סמ"ר. (13) $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$.

(14) $\frac{3\pi}{10}, \frac{3\pi}{10}, \frac{2\pi}{5}$. (15) 4 ס"מ. (16) 4 ס"מ. (17) צלע הבסיס: 5 ס"מ. גובה: 2.5

ס"מ. (18) 120 ס"מ. א. (19) $x = \frac{1}{12}a, y = \frac{1}{6}a$. ב. $x = y = \frac{1}{9}a$. (20) $\frac{4\sqrt{3}}{27}a^3$. (21) $\frac{500}{3}$

סמ"ק. (22) גובה: $\sqrt{48}$ ס"מ. רדיוס: $\sqrt{24}$ ס"מ. (24) 403.1 סמ"ק.

(25) א. $A(3, 6)$. ב. $A(0, 0)$ או $A(5, 5)$. (26) $CD = 2\sqrt{3}$. (27) א. $A(1, 8)$. ב. 32.

(28) א. $AB = 4$. ב. $S_{\Delta AOB} = 16$. (29) א. $x = 1$. ב. אין. (30) $PQ = 4$.

(31) $M(4, 2)$. (32) $(1.5, 0.5)$. (33) 8 . (34) $(0.5, 0.75)$.

(35) א. $B(\sqrt{(2a-1)/2}, (2a-1)/2)$. ב. 4.25 . (36) א. $y = 2t \cdot x - t^2$. ב. $t = -3/37$.

(37) $M(0.845, 0)$.

פרק 16 - פתרון משוואות (משפט ערך הביניים, מונוטוניות (משפט רול), ניוטון

רפסון

(1) הוכח שלמשוואות הבאות יש בדיוק פתרון אחד :

$$-4x^3 + 21x^2 - 48x + 28 = 0 \quad (4) \quad x - 0.25\sin x = 7 \quad (3) \quad x^2 = -\ln x \quad (2) \quad x^3 + 4x - 1 = 0 \quad (1)$$

(2) נתונה המשוואה $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ונתון כי $b^2 < 3ac$.

מהו מספר הפתרונות של המשוואה? הוכח את תשובתך.

(3) עבור כל אחת מהמשוואות הבאות מצא את מספר הפתרונות ופתור אותה.

$$x^2 + x\sin x = 1 - \cos x \quad (4) \quad \ln(x+5) - 4 = x \quad (3) \quad \arctan x - x = 0 \quad (2) \quad e^{x-1} = x \quad (1)$$

(4) תהי f פונקציה גזירה לכל x המקיימת: $f'(x) \leq 1$, $f(0) = 1$, $f(1) = 2$.

הוכח שלמשוואה $f(x) + \sin x = 4x$ יש בדיוק פתרון אחד.

(5) הוכח שלמשוואות הבאות יש בדיוק שני פתרונות :

$$1 + 4x^4 = 8x^3 \quad (3) \quad 4x^3 + 5x - \frac{1}{x} = 0 \quad (2) \quad e^x - 5x = 0 \quad (1)$$

(6) בכל אחת מהמשוואות הבאות מצא קשר בין הפרמטרים על מנת שלמשוואות יהיה בדיוק פתרון אחד (הנח שכל הפרמטרים שונים מאפס).

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (2) \quad ax^2 + bx + c = 0 \quad (1)$$

$$(n > 4, \text{ odd}) \quad ax^n + bx^{n-2} + cx^{n-4} - d = 0 \quad (4) \quad x + a \cos(bx) = 1 \quad (3)$$

(7) פתור את המשוואות הבאות (סעיפים 2,3 בשיטת ניוטון רפסון):

$$-4x^3 + 21x^2 - 48x + 28 = 0 \quad (3) \quad 1 + 4x^4 = 8x^3 \quad (2) \quad 7x^3 - 33x^2 + 21x + 61 = 0 \quad (1)$$

פתרונות

(2) פתרון יחיד. (3) (1) $x = 1$ (2) $x = 0$ (3) $x = -4$ (4) $x = 0$.

$$\frac{1}{ab} < -1 \text{ או } \frac{1}{ab} > 1 \quad (3) \quad 4b^2 - 12ac < 0 \quad (2) \quad b^2 - 4ac = 0 \quad (1) \quad (6)$$

$$b^2(n-2)^2 - 4anc(n-4) < 0 \quad (4)$$

(7) (1) פתרון מדויק $x = -1$. (2) פתרונות מקורבים $x = 0.5576$, $x = 1.9672$.

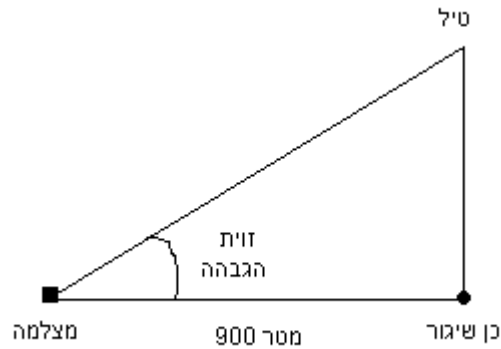
(3) פתרון מקורב $x = 0.8459$

פרק 17 - בעיות קצב שינוי

(1) נפט דולף ממכלית ומתפשט בצורת כתם מעגלי. רדיוס הכתם גדל בקצב קבוע של 0.5 מ' לשנייה. באיזה קצב גדל שטח הכתם כאשר הרדיוס הוא 20 מ' ?

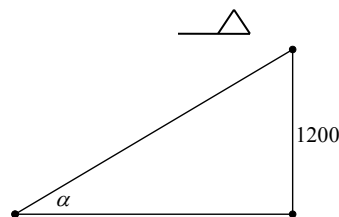
(2) סולם באורך 2.5 מ', השעון על קיר אנכי מחליק באופן כזה, שברגע שרגליו נמצאות במרחק 2 מ' מהקיר הן מתרחקות ממנו בקצב של 1 מטר לשנייה. באיזה מהירות יורד ראש הסולם לאורך הקיר ברגע זה ?

(3) מצלמה מוצבת במרחק 900 מ' מכך לשיגור טילים (ראה איור). הטיל נוסק אנכית במהירות של 260 מ' לשנייה בהיותו בגובה של 1200 מ'.
א. באיזו מהירות צריכה זווית ההגבהה של המצלמה להשתנות אז, כדי להמשיך לקלוט את דמות הטיל ?
ב. באיזה קצב משתנה אז המרחק בין המצלמה לטיל?



(4) מסננת בצורת חרוט משמשת לטיהור נוזל ממשקעים. גובה החרוט 40 ס"מ ורדיוס הבסיס שלו 10 ס"מ. כאשר גובה פני הנוזל בחרוט 20 ס"מ, הנוזל זורם מן החרוט בקצב של 30 סמ"ק לדקה. באיזה מהירות קטן גובה פני הנוזל בחרוט באותו רגע ?

(5) מטוס טס אופקית בגובה קבוע של 1200 מטר מעל לנקודת תצפית קבועה. ברגע מסוים המטוס נצפה בזווית של $\alpha = 30^\circ$. ברגע זה הזווית קטנה, ומהירות המטוס היא 480 ק"מ לשעה.
א. באיזה קצב קטנה α באותו רגע ? בטא את התוצאה במעלות לשנייה.
ב. באיזה קצב משתנה אז המרחק בין המטוס לנקודת התצפית ? בטא את התוצאה במטרים לשנייה.



(6) למויזלה בלון בצורת כדור המלא באוויר. מויזלה משחרר את האוויר מהבלון בקצב קבוע של 2 סמ"ק בשנייה. באיזה קצב קטן שטח פני הבלון כאשר רדיוסו הוא 3 ס"מ?

(7) נתון חרוט שרדיוס בסיסו וגובהו שווים ל-3 ס"מ.

פותחים ברז ומים זורמים לחרוט בקצב קבוע של L סמ"ק לשנייה.

א'. הוכח כי לאחר $\frac{9\pi}{L}$ שניות החרוט יהיה מלא מים.

ב. נסמן ב- $h(t)$ את גובה פני החרוט בזמן t . מהו קצב עליית המים בחרוט כאשר

$$h(t) = 1.5_{cm} ?$$

(8) חלקיק נע לאורך עקומה שהמשוואה שלה: $\frac{xy^3}{1+y^2} = \frac{8}{5}$.

נתון ששיעור ה- x של החלקיק גדל בקצב של 6 יחידות לשנייה ברגע שבו החלקיק נמצא

בנקודה $(1, 2)$.

א. באיזה קצב משתנה אז שיעור ה- y של החלקיק.

ב. האם החלקיק עולה או יורד באותו רגע?

(9) כדור שלג שרדיוסו ההתחלתי 4 ס"מ נמס כך שהקצב שבו רדיוסו קטן פרופורציונאלי

לשטח פניו. לאחר כחצי שעה רדיוס הכדור שווה ל-3 ס"מ.

א. רשום נוסחה שתתאר את רדיוס הכדור בזמן t .

ב. כעבור כמה זמן יהיה נפח כדור השלג $1/64$ מנפחו ההתחלתי?

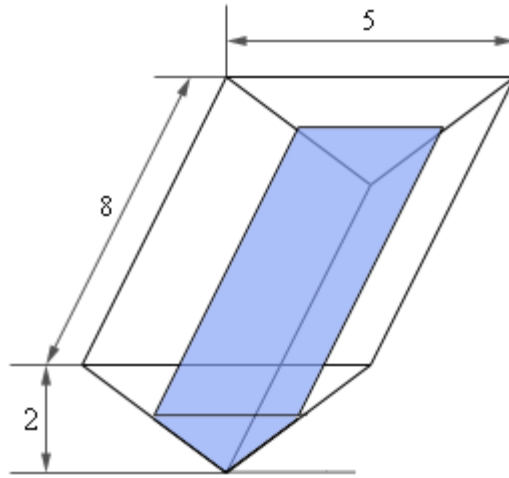
(10) מבלון מלא אוויר שרדיוסו R מתחיל לצאת אוויר. קצב יציאת האוויר הוא $-3V(t)$

כאשר $V(t)$ הוא נפח הבלון בזמן t .

הוכח כי לאחר $\ln 2$ שניות נפח הבלון יקטן לשמינית מערכו ההתחלתי.

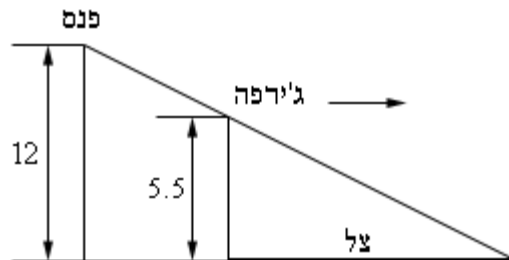
הערה: תרגילים המסומנים ב- (*) דורשים יכולת פתרון מד"ר בהפרדת משתנים

(11) נתונה שוקת מים שעומקה 8 מטרים וצורתה מנסרה משולשת שבסיסה משולשים שווי שוקיים שבסיסם 5 מ' וגובהם 2 מ' (ראה ציור). אם מים מוזרמים לשוקת בקצב קבוע של 6 מטרים מעוקבים לשנייה, באיזה קצב משתנה גובה המים כאשר גובהם 120 סנטימטרים.

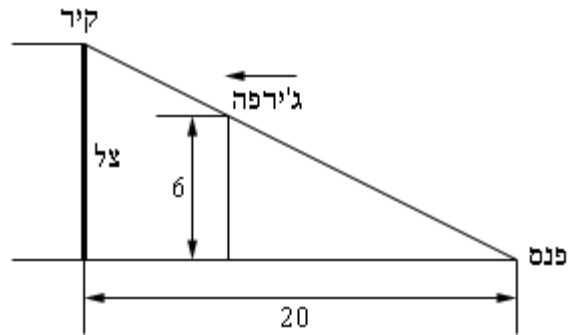


(12) פנס נמצא בראש עמוד שגובהו 12 מטר. ג'ירפה שגובהה 5.5 מטרים מתרחקת מהעמוד בקצב של 2 מטרים בשנייה.

- א. באיזה קצב מתרחק קצהו של הצל של הג'ירפה מהעמוד כאשר היא 25 מ' מהעמוד.
 ב. באיזה קצב מתרחק קצהו של הצל של הג'ירפה מהג'ירפה כאשר היא 25 מ' מהעמוד.

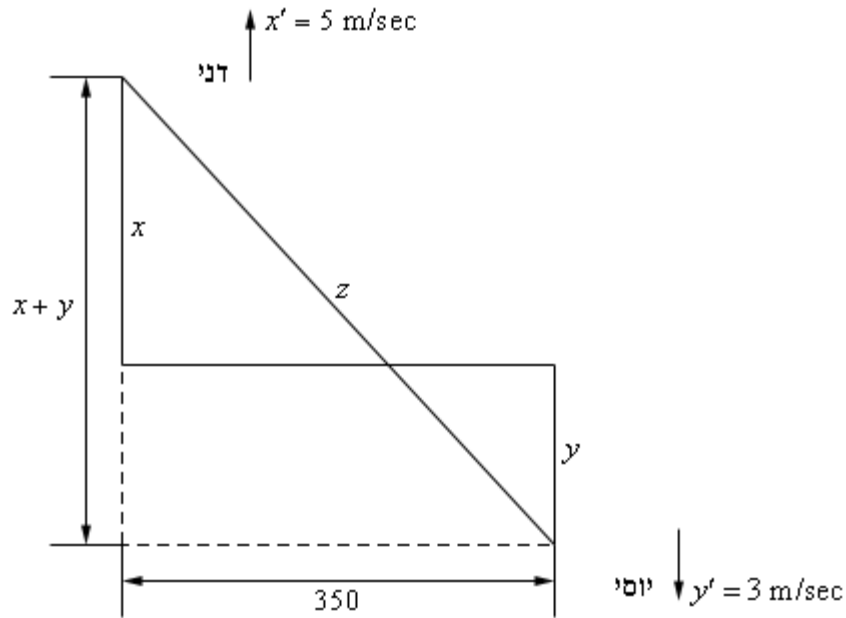


(13) פנס מונח על הקרקע, 20 מטרים מקיר. גירפה שגובהה 6 מטרים הולכת לכיוון הקיר בקצב של 2.5 מטרים לשנייה. באיזה מהירות משתנה גובהו של הצל כאשר הגירפה במרחק של 8 מטרים מהקיר? האם גובה הצל קטן או גדל באותו הזמן?



(14) דני ויוסי גרים במרחק של 350 מטרים האחד מהשני.

דני יוצא מביתו ורוכב על אופניו צפונה במהירות של 5 מטרים לשנייה. יוסי מביתו ורוכב על אופניו דרומה במהירות של 3 מטרים לשנייה. באיזה קצב משתנה המרחק בין דני ויוסי 25 דקות לאחר שדני יצא את ביתו. תוכל להיעזר באיור הבא :



(15) נניח שיש לנו שני נגדים המחוברים במקביל עם התנגדות R_1 ו- R_2 הנמדדת באוהם (Ω).

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

אז ההתנגדות הכוללת R נתונה על ידי

נניח ש- R_1 גדל בקצב של 0.4 אוהם בדקה ו- R_2 קטן בקצב של 0.7 אוהם בדקה.

באיזה קצב משתנה R כאשר : $R_1 = 80\Omega$, $R_2 = 105\Omega$?

פתרונות

(1) $20\pi \text{ m}^2/\text{sec}$. (2) $-\frac{4}{3} \text{ m}/\text{sec}$. (3) א. $0.104 \text{ rad}/\text{sec}$. ב. $208 \text{ m}/\text{sec}$.

(4) $-0.38 \text{ cm}/\text{min}$. (5) א. $100 \text{ Rad}/\text{hour}$ או $-\frac{5}{\pi}$ מעלות בשנייה. ב. $115.4 \text{ m}/\text{sec}$.

(6) 0.75 סמ"ר בשנייה. (7) ב. $\frac{4L}{9\pi}$. (8) א. $-\frac{60}{7}$ יחידות לשנייה. ב. יורד.

(9) א. $R(t) = \frac{12}{2t+3}$. ב. $t = 4.5 \text{ hours}$. (11) $0.25 \text{ m}/\text{sec}$.

(12) א. $3.6923 \text{ m}/\text{sec}$. ב. $1.6923 \text{ m}/\text{sec}$. (13) $2.0833 \text{ m}/\text{sec}$. (14) $7.9958 \text{ m}/\text{sec}$.

(15) קטן בקצב של $0.002045 \Omega/\text{min}$.

פרק 18 - משפט לגרנג'

(1) הוכח את אי השוויונים הבאים בתחום הרשום לידם:

$$(0 < a < b) \quad \frac{b-a}{b} < \ln\left(\frac{b}{a}\right) < \frac{b-a}{a} \quad (1)$$

$$(0 < a < b) \quad \frac{b-a}{2\sqrt{b}} < \sqrt{b} - \sqrt{a} < \frac{b-a}{2\sqrt{a}} \quad (2)$$

$$\left(0 < a < b < \frac{\pi}{2}\right) \quad \frac{b-a}{\cos^2 a} < \tan b - \tan a < \frac{b-a}{\cos^2 b} \quad (3)$$

$$(a < b) \quad (a-b)e^{-a} < e^{-b} - e^{-a} < (a-b)e^{-b} \quad (4)$$

$$(0 < a < b) \quad \frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2} \quad (5)$$

$$(0 < a < b < 1) \quad \frac{b-a}{\sqrt{1-a^2}} < \arcsin b - \arcsin a < \frac{b-a}{\sqrt{1-b^2}} \quad (6)$$

$$(0 < a < b) \quad \frac{b-a}{\sqrt{1+b^2}} < \operatorname{arcsinh}(b) - \operatorname{arcsinh}(a) < \frac{b-a}{\sqrt{1+a^2}} \quad (7)$$

$$(0 < a < b < 1) \quad \frac{b-a}{1-a^2} < \operatorname{artanh}(b) - \operatorname{artanh}(a) < \frac{b-a}{1-b^2} \quad (8)$$

$$(0 < a < b) \quad \sqrt[n]{b} \cdot \frac{b-a}{n \cdot b} < \sqrt[n]{b} - \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{a} \cdot \frac{b-a}{n \cdot a} \quad (9)$$

$$(1 < a < b) \quad \frac{2b(b-a)}{b^2+1} < \ln\left(\frac{b^2+1}{a^2+1}\right) < \frac{2a(b-a)}{a^2+1} \quad (10)$$

(2) הוכח את אי השוויונים הבאים בתחום הרשום לידם:

$$(x > 0) \quad \frac{x}{1+x^2} < \arctan x < x \quad (2) \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right) \quad x < \tan x < \frac{x}{\cos^2 x} \quad (1)$$

$$(x > 0) \quad \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} < \operatorname{arcsinh}(x) < x \quad (4) \quad (0 < x < 1) \quad x < \arcsin x < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (3)$$

$$(x > 0) \quad \frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x \quad (6) \quad (0 < x < 1) \quad x < \operatorname{artanh}(x) < \frac{x}{1-x^2} \quad (5)$$

$$(x > 0) \quad \sin x \leq x \quad (8) \quad (x > 0) \quad 1+x < e^x < 1+xe^x \quad (7)$$

$$(0 < x < 1) \quad \arctan x > \ln(1+x) \quad (*10) \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{3}\right) \quad \tan x < 4x \quad (9)$$

(3) הוכח את אי השוויונים הבאים :

$$|\cos x_2 - \cos x_1| \leq |x_2 - x_1| \quad (2) \quad |\sin x_2 - \sin x_1| \leq |x_2 - x_1| \quad (1)$$

$$|\tan y - \tan x| \leq 8 |\sin x - \sin y| \quad (4) \quad |\arctan y - \arctan x| < |y - x| \quad (3)$$

(4) הוכח את אי השוויונים הבאים :

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} + 1 < \sqrt{2} < 1.5 \quad (2) \quad \frac{1}{3} < \ln\left(\frac{3}{2}\right) < \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{15} + \frac{\pi}{6} < \arcsin(0.6) < \frac{1}{8} + \frac{\pi}{6} \quad (4) \quad \frac{3}{25} + \frac{\pi}{4} < \arctan\left(\frac{4}{3}\right) < \frac{1}{6} + \frac{\pi}{4} \quad (3)$$

(5) א. תהי $f(x)$ פונקציה גזירה לכל x המקיימת $|f'(x)| \leq 5$.

ידוע כי $f(1) = 3$, $f(4) = 18$. הוכח כי $f(2) = 8$.

ב. תהי $f(x)$ פונקציה גזירה לכל x המקיימת $|f'(x)| \leq 7$.

ידוע כי $f(1) = 3$, $f(4) = 18$. הוכח כי $4 \leq f(2) \leq 10$.

* תרגיל 2 סעיף 10 ותרגיל 3 סעיף 4 עוסקים במשפט קושי שהוא הכללה של משפט לגרנג', ולפיכך רלוונטיים רק אם למדת משפט זה.

פרק 19 - טור טיילור/מקלורן

(1) מצא את הפיתוח לטור טיילור סביב $x = 0$ (טור מקלורן) של הפונקציות הבאות :
 * תוכל להיעזר בפיתוחים הידועים לטור מקלורן המופיעים בנספח שבעמוד האחרון.

$$f(x) = \sinh x \quad (3) \qquad f(x) = x^2 e^{-4x} \quad (2) \qquad f(x) = \sin 2x \quad (1)$$

$$f(x) = 2^x \quad (6) \qquad f(x) = \cos^2 x \quad (5) \qquad f(x) = \sin^2 x \quad (4)$$

$$f(x) = \arcsin x \quad (9) \qquad f(x) = \ln(2 - 3x + x^2) \quad (8) \qquad f(x) = x \cos(4x^2) \quad (7)$$

$$f(x) = \frac{1}{1+9x^2} \quad (12) \qquad f(x) = \frac{3}{1-x^4} \quad (11) \qquad f(x) = \frac{1}{1+x} \quad (10)$$

$$f(x) = \frac{x}{9+x^2} \quad (15) \qquad f(x) = \frac{x}{4x+1} \quad (14) \qquad f(x) = \frac{1}{x-5} \quad (13)$$

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \quad (18) \qquad f(x) = \frac{7x-1}{3x^2+2x-1} \quad (17) \qquad f(x) = \frac{3}{x^2+x-2} \quad (16)$$

$$f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (21) \qquad f(x) = \ln(1-x) \quad (20) \qquad f(x) = \ln(1+x) \quad (19)$$

$$f(x) = \arctan(x/3) \quad (24) \qquad f(x) = \frac{x^2}{(1-2x)^2} \quad (23) \qquad f(x) = \ln(5-x) \quad (22)$$

הערות : לפתרון סעיפים 16,17 עליך להכיר את הנושא פירוק לשברים חלקיים.
 לפתרון סעיפים 18,19,23,24 עליך להכיר את הנושא גזירה ואינטגרציה של טורי מקלורן.

(2) מצא את הפיתוח לטור טיילור סביב $x = x_0$ של הפונקציות הבאות :

$$\left(x_0 = \frac{\pi}{2}\right) f(x) = \sin x \quad (3) \quad \left(x_0 = 2\right) f(x) = \frac{1}{x} \quad (2) \quad \left(x_0 = 1\right) f(x) = \ln x \quad (1)$$

(3) מצא את ארבעת האיברים הראשונים, השונים מאפס, בפיתוח לטור מקלורן של הפונקציות הבאות (נדרש ידע בכפל וחילוק של פולינומים) :

$$f(x) = \frac{\sin x}{e^x} \quad (3) \quad f(x) = \tan x \quad (2) \quad f(x) = e^{-x^2} \cos x \quad (1)$$

(4) חשב את סכום הטורים הבאים :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n!} \quad (3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!} \quad (2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad (1) \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \quad (6) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \quad (5) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} \quad (4) \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}(n+1)} \quad (9) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \quad (8) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \quad (7) \end{aligned}$$

(5) חשב את ערך הגבול בתרגילים הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^3} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5} \quad (1)$$

(6) חשב בשגיאה הקטנה מ- 0.001 :

$$\arctan 0.25 \quad (3) \quad \sin 3^\circ \quad (2) \quad \frac{1}{e} \quad (1)$$

(7) חשב בעזרת n איברים ראשונים (שונים מאפס) בפיתוח לטור מקלורן והערך את השגיאה בחישוב :

$$(n=4) \ln 1.5 \quad (3) \quad (n=1) \cos 4^\circ \quad (2) \quad (n=3) \frac{1}{\sqrt{e}} \quad (1) \quad (8)$$

א. מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\sin x \cong x - \frac{x^3}{3!}$ עבור $|x| \leq \frac{\pi}{6}$

ב. מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\ln(1+x) \cong x$ עבור $|x| < 0.01$

ג. מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\cos x \cong 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$ עבור $|x| \leq 0.2$

(9)

א. עבור אילו ערכי x , $\sin x \cong x - \frac{x^3}{3!}$ בשגיאה הקטנה מ- 0.001.

ב. עבור אילו ערכי x , $\arctan x \cong x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}$ בשגיאה הקטנה מ- 0.01.

(10) חשב בקירוב את האינטגרלים הבאים בשגיאה הקטנה מ- ε .

$$(\varepsilon = 0.001) \int_0^{0.1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx \quad (2) \quad (\varepsilon = 0.0001) \int_0^{0.2} \frac{\sin x}{x} dx \quad (1)$$

$$(\varepsilon = 0.0001) \int_0^{0.5} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx \quad (3)$$

נוסחת השארית של לגרנז'

(11) רשום את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x) = \sqrt[3]{64+x}$ סביב $x_0 = 0$,

כולל שארית לגרנז'. חשב בעזרת הנוסחה שקיבלת את $\sqrt[3]{66}$ והערך את השגיאה בקירוב.

(12) רשום את נוסחת טיילור מסדר ראשון לפונקציה $f(x) = \tan x$ סביב $x_0 = 0$,

כולל שארית לגרנז'. חשב בעזרת הנוסחה שקיבלת את $\tan 0.1$ והערך את השגיאה בקירוב.

(13) רשום את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x) = \sqrt{x+4}$ סביב $x_0 = 0$,

כולל שארית לגרנז'. חשב בעזרת הנוסחה שקיבלת את $\sqrt{5}$ והערך את השגיאה בקירוב.

(14) רשום את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x) = \sqrt[4]{x}$ סביב $x_0 = 16$,

כולל שארית לגרנז'. חשב בעזרת הנוסחה שקיבלת את $\sqrt[4]{15}$ והערך את השגיאה בקירוב.

הערה לגבי קירובים:

אם מבקשים קירוב שהוא מדויק ל- n ספרות אחרי הנקודה, אז עלינו לדרוש, שהערך המוחלט של השגיאה

יהיה קטן מ- 0.5×10^{-n} . למשל דיוק של שלוש ספרות אחרי הנקודה משמעותו שהערך המוחלט של השגיאה

יהיה קטן מ- $0.5 \times 10^{-3} = 0.0005$.

אני בספר לא השתמשתי בניסוח זה, אך יש המשתמשים בו.

פתרונות

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (-\infty < x < \infty) \quad (3)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n x^{n+2}}{n!} \quad (-\infty < x < \infty) \quad (2)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (-\infty < x < \infty) \quad (1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 2)^n x^n}{n!} \quad (-\infty < x < \infty) \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} \quad (-\infty < x < \infty) \quad (5)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} \quad (-\infty < x < \infty) \quad (4)$$

$$x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (-1 < x < 1)$$

$$\ln 2 - \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (-1 \leq x < 1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^{2n} x^{4n+1}}{(2n)!} \quad (-\infty < x < \infty) \quad (8)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} 3x^{4n} \quad (11)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (10)$$

$$(|x| < 5) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{5^{n+1}} x^n \quad (13)$$

$$(|x| < \frac{1}{3}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 9^n x^{2n} \quad (12)$$

$$(|x| < 3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}} \quad (15)$$

$$(|x| < \frac{1}{4}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n x^{n+1} \quad (14)$$

$$(|x| < \frac{1}{3}) \sum_{n=0}^{\infty} (2(-1)^n - 3^n) x^n \quad (17)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} - 1 \right) x^n \quad (16)$$

$$(-1 < x \leq 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \quad (19)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot n \cdot x^{n-1} \quad (18)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n+1}}{2n+1} \quad (21)$$

$$(-1 \leq x < 1) \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (20)$$

$$(|x| < \frac{1}{2}) \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (n+1) x^{n+2} \quad (23)$$

$$(-5 \leq x < 5) \ln 5 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{5^{n+1} (n+1)} \quad (22)$$

(24

$$(|x| \leq 3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)}$$

(2)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x - \frac{\pi}{2})^{2n}}{2n!} \quad (-\infty < x < \infty) \quad (3)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^n}{2^{n+1}} \quad (0 < x < 4) \quad (2)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{n+1}}{n+1} \quad (0 < x \leq 2) \quad (1)$$

(3)

$$x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + \dots \quad (3)$$

$$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots \quad (2)$$

$$1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{25}{24}x^4 - \frac{331}{720}x^6 + \dots \quad (1)$$

(4)

$$\ln \frac{3}{2} \quad (9)$$

$$\ln 2 \quad (8)$$

$$\cos 1 \quad (7)$$

$$\sin 1 \quad (6)$$

$$\pi/4 \quad (5)$$

$$2e \quad (4)$$

$$\sqrt{e} \quad (3)$$

$$e^{-2} \quad (2)$$

$$e \quad (1)$$

(5)

$$1/3 \quad (3)$$

$$1/3 \quad (2)$$

$$1/120 \quad (1)$$

(6)

$$47/192 \quad (3)$$

$$\pi/60 \quad (2)$$

$$53/144 \quad (1)$$

(7)

$$\frac{1}{160} \quad \text{בשגיאה הקטנה מ-} \frac{77}{192} \quad (3)$$

$$1 \quad \text{בשגיאה הקטנה מ-} \frac{\pi \cdot \pi}{4050} \quad (2)$$

$$\frac{1}{48} \quad \text{בשגיאה הקטנה מ-} \frac{5}{8} \quad (1)$$

(8)

$$(0.2)^6 / 6! \quad (2)$$

$$(0.01)^2 / 2 \quad (2)$$

$$(\pi/6)^5 / 5! \quad (1)$$

(9)

$$|x| < \sqrt[9]{9/100} \quad (2)$$

$$|x| < \sqrt[5]{3/25} \quad (1)$$

(10)

$$143/576 \quad (3)$$

$$39/400 \quad (2)$$

$$449/2250 \quad (1)$$

פרק 20 - תיאוריה (הוכחות נבחרות)

סרטוני תיאוריה בלבד - ללא תרגילים.

נספחים - נוסחאות

נוסחאות - גבולות

	$x \rightarrow -\infty$	$x \rightarrow 0$	$x \rightarrow \infty$
$y = \frac{1}{x}$	$\frac{1}{-\infty} = 0$	$\frac{1}{0^+} = \infty, \frac{1}{0^-} = -\infty$	$\frac{1}{\infty} = 0$
$y = e^x$	$e^{-\infty} = 0$	$e^0 = 1$	$e^\infty = \infty$
$y = \ln x$	---	$\ln(0^+) = -\infty$	$\ln(\infty) = \infty$
$y = \arctan x$	$\text{atan}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$	$\text{atan}(0) = 0$	$\text{atan}(\infty) = \frac{\pi}{2}$
$y = a^x, a > 1$	$a^{-\infty} = 0$	$a^0 = 1$	$a^\infty = \infty$
$y = a^x, 0 < a < 1$	$a^{-\infty} = \infty$	$a^0 = 1$	$a^\infty = 0$
$y = \sin x$	---	$\sin 0 = 0$	---
$y = \cos x$	---	$\cos 0 = 1$	---
$y = \frac{\sin x}{x}$	0	1	0
$y = \frac{\tan x}{x}$	---	1	---
$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	e	(from right) 1	e
$y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$	---	e	1
$y = \sqrt{x}$	---	$\sqrt{0^+} = 0$	$\sqrt{\infty} = \infty$
$y = \sqrt[3]{x}$	$-\infty$	$\sqrt[3]{0} = 0$	$\sqrt[3]{\infty} = \infty$

Defined Limits:

$$\infty \cdot \infty = \infty, \quad \infty(-\infty) = -\infty, \quad \infty + \infty = \infty, \quad \infty \pm a = \infty, \quad \infty \cdot (\pm a) = \pm \infty, \quad \infty / (\pm a) = \pm \infty$$

Undefined Limits:

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$$

נוסחאות - נגזרות

1. $y = a \rightarrow y' = 0$
2. $y = f^n \rightarrow y' = n \cdot f^{n-1} \cdot f'$
3. $y = e^f \rightarrow y' = e^f \cdot f'$
4. $y = a^f \rightarrow y' = a^f \cdot f' \cdot \ln a$
5. $y = \ln f \rightarrow y' = \frac{1}{f} \cdot f'$
6. $y = \sin f \rightarrow y' = \cos f \cdot f'$
7. $y = \cos f \rightarrow y' = -\sin f \cdot f'$
8. $y = \tan f \rightarrow y' = \frac{1}{\cos^2 f} \cdot f'$
9. $y = \cot f \rightarrow y' = -\frac{1}{\sin^2 f} \cdot f'$
10. $y = \arcsin f \rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-f^2}} \cdot f'$
11. $y = \arccos f \rightarrow y' = -\frac{1}{\sqrt{1-f^2}} \cdot f'$
12. $y = \arctan f \rightarrow y' = \frac{1}{1+f^2} \cdot f'$
13. $y = \operatorname{arccot} f \rightarrow y' = -\frac{1}{1+f^2} \cdot f'$
14. $y = \sinh f \rightarrow y' = \cosh f \cdot f'$
15. $y = \cosh f \rightarrow y' = \sinh f \cdot f'$
16. $y = \tanh f \rightarrow y' = \frac{1}{\cosh^2 f} \cdot f'$
17. $y = \operatorname{coth} f \rightarrow y' = -\frac{1}{\sinh^2 f} \cdot f'$
18. $y = f(x)^{g(x)} \rightarrow y' = f(x)^{g(x)} \cdot (g(x) \cdot \ln(f(x)))'$

נוסחאות - אינטגרלים

$$\int adx = ax + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int k^x dx = \frac{k^x}{\ln k} + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \tan x dx = -\ln |\cos x| + c$$

$$\int \cot x dx = \ln |\sin x| + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln |ax+b| + c$$

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c$$

$$\int k^{ax+b} dx = \frac{1}{a} \frac{k^{ax+b}}{\ln k} + c$$

$$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + c$$

$$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + c$$

$$\int \tan(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \ln |\cos(ax+b)| + c$$

$$\int \cot(ax+b) dx = \frac{1}{a} \ln |\sin(ax+b)| + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + c$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \tan x \right| + c$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \left(\frac{x}{a} \right) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \left(\frac{x}{a} \right) + c$$

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln \left| \frac{1}{\sin x} - \cot x \right| + c$$

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + c$$

$$\int \frac{f'}{f} dx = \ln |f| + c$$

$$\int e^f \cdot f' dx = e^f + c$$

$$\int \sin f \cdot f' dx = -\cos(f) + c$$

$$\int \sqrt{f} \cdot f' dx = \frac{2}{3} f^{\frac{3}{2}} + c$$

$$\int f \cdot f' dx = \frac{1}{2} f^2 + c$$

$$\int \cos f \cdot f' dx = \sin(f) + c$$

$$\int \frac{f'}{\sqrt{f}} dx = 2\sqrt{f} + c$$

$$\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$$

נוסחאות - טריגו

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\begin{cases} \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\ \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \\ \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)) \\ \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) \\ \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) \end{cases}$$

$$\sin x = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2\pi k \\ x = (\pi - \alpha) + 2\pi k \end{cases}$$

$$\cos x = \cos \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2\pi k \\ x = -\alpha + 2\pi k \end{cases}$$

$$\tan x = \tan \alpha \Rightarrow x = \alpha + \pi k$$

$$\cot x = \cot \alpha \Rightarrow x = \alpha + \pi k$$

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi k$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

נוסחאות - אלגברה

$$\begin{cases} (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \\ (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\ (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\ (a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab \\ a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \\ a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 + b^2 - ab) \\ a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + b^2 + ab) \\ a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 \\ a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^m a^n = a^{m+n} \\ \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \\ (a^m)^n = a^{mn} \\ (ab)^n = a^n b^n \\ \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \\ a^0 = 1 \\ a^{-n} = \frac{1}{a^n} \\ \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}, \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \\ a^x = b \Rightarrow x = \ln b \end{cases}$$

$$\begin{cases} a > 0, b > 0 \\ \ln a + \ln b = \ln ab \\ \ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b} \\ \ln 1 = 0, \ln e = 1 \\ \ln e^n = n \\ \ln x^n = n \ln x \quad (x > 0) \\ e^{\ln x} = x \\ a^b = e^{b \ln a} \\ \ln x = k \Rightarrow x = e^k \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c \\ \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} |a| = \sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{if } a \geq 0 \\ -a & \text{if } a < 0 \end{cases} \\ |a \cdot b| = |a| \cdot |b| \\ \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \\ |x| < a \Leftrightarrow -a < x < a \\ |x| > a \Leftrightarrow x < -a \text{ or } x > a \end{cases}$$

נוסחאות - טורי מקלורן של פונקציות חשובות

טור מקלורן

תחום התכנסות

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad -\infty < x < \infty$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad -\infty < x < \infty$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad -\infty < x < \infty$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \dots \quad -1 < x < 1$$

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n$$

$$= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots$$

$-1 \leq x \leq 1 \ (m > 0)$
 $-1 < x \leq 1 \ (-1 < m < 0)$
 $-1 < x < 1 \ (m \leq -1)$
 $m \neq 0, 1, 2, 3, \dots$